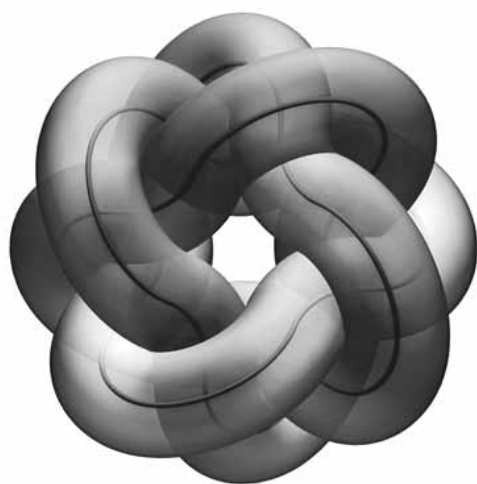


KNUDETEORI OG JONES-POLYNOMIET

UNF MATEMATIK CAMP 2010



JAKOB LINDBLAD BLAAVAND

17. JULI 2010

INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG
AARHUS UNIVERSITET

Introduktion

Denne note er lavet i forbindelse med Matematik Camp 2010, afholdt af Ungdommens Naturvidenskabelige Forening (UNF), på Københavns Universitet, 11. juli 2010 - 17. juli 2010.

Noten er en introduktion til knudeteori og knudeinvarianter. Noten behandler alt fra de grundlæggende definitioner af knuder og links, til konkrete knudeinvarianter som trefarvning og ikke mindst Jones-polynomiet. Jones-polynomiet bliver defineret og simple egenskaber diskuteret. For en yderligere diskussion af Jones-polynomiets fantastiske facetter henvises til [1].

Som et supplement til noterne, kan man med fordel hente programmet KnotPlot (<http://www.knotplot.com/>). Programmet er en god guide til at øge sin forståelse af knuder og deres struktur. Ved forelæsningerne blev der vist eksempler fra programmet.

Noten er baseret på [1], [2], [3] og [4]. [4] er en lille bemærkelsesværdig bog. Det er en populærvidenskabelig bog, og den indeholder rigtig mange interessante ting. Den kan læses af alle der er matematikinteresserede.

Forsidebillede er lavet af Jason Cantarella, University of Georgia.

Indholdsfortegnelse

Introduktion	i
Indholdsfortegnelse	ii
1 Indledende definitioner	1
1.1 Polygonale knuder	2
1.2 Opgaver	3
2 Reidemeistertransformationer	4
2.1 Reidemeistertransformationer	4
2.2 Primknuder	8
2.3 Opgaver	8
3 Knudeinvarianter	10
3.1 Trefarvning	10
3.2 Linktal	13
3.3 Opgaver	16
4 Jones-polynomiet	17
4.1 Laurentpolynomier	17
4.2 Kauffman-parentesen	18
4.3 Vridningstal	20
4.4 Jones-polynomiet	21
4.4.1 Perspektiv	24
4.5 Opgaver	25
Litteratur	26

Kapitel 1

Indledende definitioner

I knudeteori ser vi på, hvordan en eller flere snore kan være filtret sammen i et 3-dimensionalt rum. Når vi skal i gang med at bevise sætninger og regne med knuderne, skal vi se på skyggebilleder af knuderne, de såkaldte projektioner i et 2-dimensionalt rum. I matematik betegner vi et 3-dimensionalt rum med $\mathbb{R}^3$ og 2-dimensionelt rum med $\mathbb{R}^2$. Det er som du kender det fra gymnasiet,

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Vi skal også benytte os af de naturlige tal og de hele tal, dvs.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

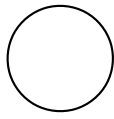
I knudeteori er det helt fundamentale spørgsmål om to givne knuder er ens. Dvs. hvis du har to knuder, kan du så på en eller anden måde, få den ene til at blive den anden, ved at filtrere rundt med de forskellige dele af det reb knuden er bundet på? Du må naturligvis ikke bruge en saks. Hvis rebet ikke er splejset sammen i enderne, så er det jo let at få en knude til at blive en hvilken som helst anden. Man skal bare filtrere den ud først, så der ikke er nogen knude på rebet, og så lave den knude man gerne vil have det til at være. Men er enderne på rebet splejset sammen, så er det derimod en helt anden sag – nu kan du ikke bare lige sådan få enhver knude til at blive en anden. Hvis du er Jørgen Clevin og bruger saks og lim, er det igen let, så det gør vi ikke.

Vores knuder er knuder på en snor, hvor enderne er splejset sammen. Samtidig skal vores snore være så elastiske, at vi kan hive, alt, hvad vi vil i dem, uden at de går i stykker. Nu er spørgsmålet så igen, hvordan vi afgør, om en knude kan filtreres ud til en cirkel uden knuder? Hvordan kan man *bevise*, at en knude aldrig kan filtreres ud? Det er lidt svært at se, hvordan det skal blive præcist – men det er det vi skal forsøge at gøre.

Bladrer du lidt i noten, kan du se en masse knuder. Knuderne lever i et 3-dimensionelt rum, men papiret har kun 2 dimensioner, så det du ser er blot knudens skygge. Vi skal i det følgende arbejde matematisk med knuderne, og det betyder, at vi skal have nogle meget præcise definitioner af, hvad en knude er. Derfor kan det næste let blive meget abstrakt – og svært – fordi vi forsøger at være meget præcise. Det er derfor vigtigt hele tiden at have nogle eksempler på knuder i hovedet.

Hvis vi skal være rigtig præcise med definitionen af en knude, så skal vi bruge en hel del af den slags matematik, der kaldes *topologi*. Men hvis vi kan acceptere et par ting eller to, kan vi heldigvis klare os uden.

Polygonale knuder



Figur 1.1: Ikke-knuden eller den *trivielle knude*



Figur 1.2: Trekløveret



Figur 1.3: Figur-8

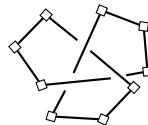


Figur 1.4: En anden projektion af den trivielle knude

1.1 Polygonale knuder

Knudeteorien skal nok blive abstrakt, så vi må sørge for at begrænse os tilstrækkeligt her i begyndelsen. Derfor vil vi se på *polygonale knuder*. Nu er vores knuder ikke fine glatte snore men derimod sammensat af rette linjestykker.

Definition 1.1. En (polygonal) knude er en endelig mængde af punkter i $\mathbb{R}^3$, der er forbundet af rette linjestykker, så vi får én sammenhængende lukket kurve, hvor to linjestykker ikke skærer hinanden.



Figur 1.5: Polygonal knude. Trekløveret kan konstrueres med ni punkter og ni linjestykker.

Som det ses af nedenstående figur, er det ikke nogen indskrænkning at se på polygonale knuder. Vi kan bare vælge flere og flere punkter, så vores knude til sidst kommer til at se glat ud.



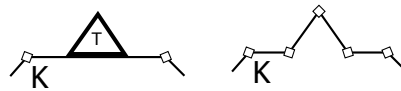
Figur 1.6: Tilnærmelse af polygonal knude til en glat kurve

Vi skal nu give en præcis definition af, hvad det er, vi gør, når vi sidder med en knude i hånden og forsøger at filtrere den ud. For at få det til at lyde mere matematisk, så vil vi sige *at deformere* i stedet for at kalde det *at filtrere*. Hvilke deformationer har vi brug for og ikke mindst, hvilke deformationer må vi ikke lave?

Som nævnt i indledningen må vi ikke klippe knuden op, og vi må ikke lime dele af knuden sammen. Vi skal også sørge for, at knuden ikke gennemskærer sig selv, når vi laver deformationerne. Hvis vi tillod gennemskæringer, så ville det svare til at klippe en snor over, flytte den anden snor igennem det nye hul, og så lime snoren sammen igen.

Opgaver

Definition 1.2. Lad K være en knude og $T \subset \mathbb{R}^3$ en trekant, der har én side, som overlapper en af K 's linjestykker – og hvor K ellers ikke går gennem det indre af T . I denne situation kan man lave en Δ -transformation af K , ved at udvide K over T . Dvs. erstatte linjestykket af K som var fælles med T og indsætte det med T 's resterende to sider (se figuren). Det giver os en ny knude K' . Det omvendte med at fjerne en trekant fra K kaldes også en Δ -transformation.



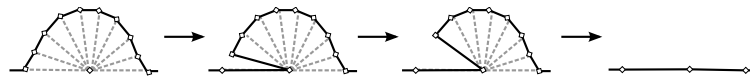
Figur 1.7: Δ -transformation

Definition 1.3. To knuder K og K' kaldes *ens* eller *ækvivalente*, hvis der findes en endelig række af Δ -transformationer så

$$K = K_0 \xrightarrow{\Delta_1} K_1 \xrightarrow{\Delta_2} K_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{\Delta_n} K_n = K'.$$

Hvis K og K' er ens betegnes det ved $K \sim K'$.

Nu er deformationen brudt ned til dens mindste bestanddele. Vi har fået defineret knuder helt præcist. Nu kan vi gå i gang med at lave matematik med dem.



Figur 1.8: Figuren viser, at vores definition på en ækvivalens er, hvad vi ville forvente, hvis vi tænker på knuderne som elastikker.

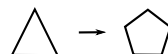
1.2 Opgaver

Opgave 1.4. Hvis to knuder, K_1, K_2 er ens skrives $K_1 \sim K_2$. Vi kunne i bund og grund også have skrevet, at $K_1 = K_2$ fordi $\sim$ opfylder tre egenskaber som $=$ også opfylder, nemlig

1. Refleksivitet $K \sim K$.
2. Symmetri $K \sim K' \Rightarrow K' \sim K$.
3. Transitivitet $K \sim K', K' \sim K'' \Rightarrow K \sim K''$.

Vis, at $\sim$ opfylder de tre ovenstående egenskaber. Når disse tre egenskaber er opfyldt kaldes $\sim$ en ækvivalensrelation.

Opgave 1.5. 1. Gør en trekant til en femkant med Δ -transformationer



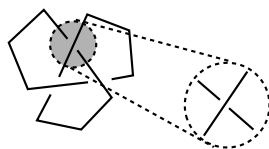
2. Hvad er det mindste antal Δ -transformationer, der skal bruges i 1?
3. Hvad er det mindste antal Δ -transformationer, der skal bruges for at gøre en regulær n -kant til en trekant?

Kapitel 2

Reidemeistertransformationer

Knuder er noget, der lever i tre dimensioner. Når vi skal tegne dem på papir, er det dog noget besværligt at lave tredimensionelle billeder hver gang. Papir har jo kun to dimensioner, så hver gang tegner vi i stedet skyggen af en knude. Vores tegning bliver naturligvis forskellig afhængigt af, hvordan lyset falder på knuden. Skyggen af en knude kalder vi en projektion. I de billeder, der hidtil har været i noten, er der i hvert kryds angivet, hvilken streng der går over, og hvilken der går under. Sørger man for at gøre det i alle krydsninger, så kaldes projektionen et *knudediagram*. Når vi laver projektionen ned på $\mathbb{R}^2$, skal vi være en smule påpasselige med at få vendt vores knude rigtigt, så der f.eks. ikke er tre strenge, der krydser hinanden i ét punkt.

Har vi et knudediagram for en knude, kan vi zoome ind på et lille område og se lidt nærmere på, hvordan knuden ser ud her. Mange gange er man kun interesseret i, hvad der sker lige omkring et enkelt kryds, og derfor tegner man kun disse små udsnit. Det betyder, at man kan undgå at henvise til en bestemt knude, men blot se på det specifikke kryds.



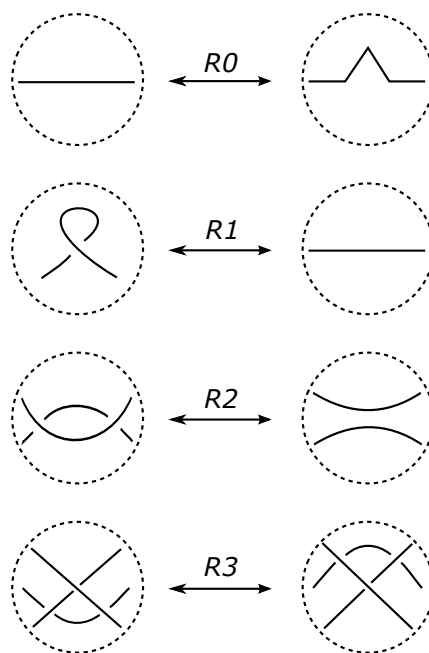
2.1 Reidemeistertransformationer

Vi vil gerne lave deformationer af knuderne på papiret – altså vi vil lave deformationer af diagrammerne. Når vi er i papirets to dimensioner, så har vi skyggen af Δ -transformationerne at arbejde med. Vi vil dog definere fire nye transformationer, som er angivet i figur 2.1. Vi kan bruge de nye transformationer i papirets to dimensioner, fordi de er specifikke transformationer af diagrammer. Vi skal senere se, at de fire transformationer er alt hvad vi behøver for at kunne skelne knuder fra hinanden.

Bemærk her, at $R0$ blot er en direkte projektion af en Δ -transformation. De tre andre er tegnet med glatte kurver, og det er for at gøre det nemmere at se, hvad der sker. Det tilsvarende kan laves med polygonale knuder. Fremover vil vi i stedet for polygonale knuder tegne glatte kurver, selvom vi arbejder med polygonale knuder – simpelthen fordi det er nemmere. Grunden til, at vi ikke definerede vores knuder som glatte kurver er, at det ville kræve vanskeligere matematik.

$R1$ giver os lov til at rette et twist ud. Med $R2$ kan vi flytte to snore, der ligger over hinanden – uden at være sammenfiltret – væk fra hinanden. $R3$ siger, at vi kan flytte en snor henover en krydsning.

Reidemeistertransformationer



Figur 2.1: Reidemeistertransformationer

Det er vigtigt, at bemærke, at vi ikke skelner mellem spejlbilleder, rotationer eller ombytninger af over- og underkrydsninger af disse Reidemeistertransformationer. Hvis vi skulle være helt præcise, så skulle vi også have inkluderet spejlbilledet af $R3$, men det undlader man som regel, da det essentielt er det samme som $R3$.

I 1920'erne viste tyskeren Kurt Reidemeister følgende meget vigtige sætning, der mere eller mindre var starten på alt knudeteori.

Sætning 2.1 (Reidemeisters sætning). *To knuder K, K' med diagrammer D, D' er ækvivalente, hvis og kun hvis der findes en endelig række af Reidemeistertransformationer, der laver det ene diagram D om til det andet diagram D' .*

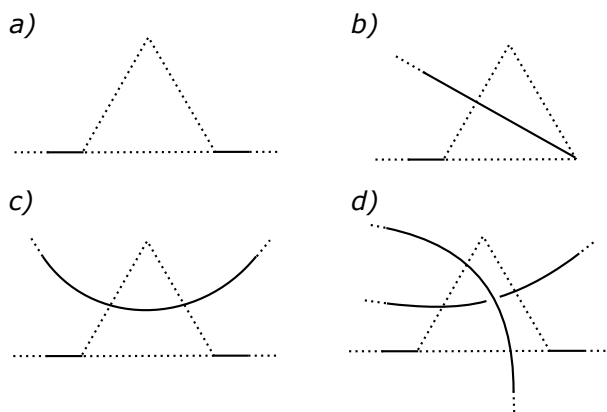
Bemærkning 2.2. Normalt siger vi, at der kun er tre Reidemeistertransformationer, $R1$, $R2$ og $R3$. $R0$ tages for givet.

Bemærkning 2.3. Vendingen *hvis og kun hvis* betyder på matematisk det samme som en biimplikation $\iff$. Altså siger Reidemeisters sætning, at to knuder er ens, hvis der findes en endelig række af Reidemeistertransformationer fra det ene diagram til det andet – og omvendt: hvis to knuder er ens, så findes der en endelig række af Reidemeistertransformationer fra det ene diagram til det andet.

Bevis. Når et bevis indeholder en biimplikation skal man bevise begge retninger. Lad os derfor vise *kun hvis*-delen først. $\Rightarrow$: Antag at knuderne K, K' , med diagrammerne D, D' , er ækvivalente. Vi ved da fra definition 1.3, at der findes en endelig række af Δ -transformationer der tager K til K' . Vi skal nu vise, at enhver Δ -transformation på en knude er repræsenteret af et eller flere Reidemeistertransformationer i et tilsvarende knudediagram. Det vil sige, at skyggen af en Δ -transformation er en Reidemeistertransformation eller en sammensætning af endeligt mange.

Projektionen af hver trekant kan indeholde meget mere end blot et enkelt eller to kryds. Da Reidemeistertransformationerne kun udtaler sig om et enkelt kryds, vil vil sørge for at bryde vores Δ -transformation ned i nogle mindre stykker, så der i

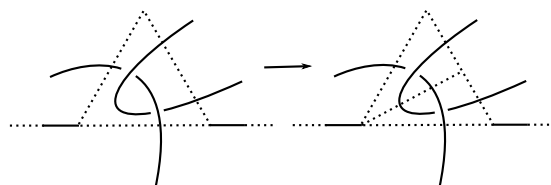
projektion af hver, kun indgår et enkelt kryds. Se på figur 2.3 for et eksempel. Figur 2.2 indeholder også alle de muligheder, der kan opstå. Igen kan der være spejlinger, rotationer eller ombytninger af over- og underkrydsninger, af mulighederne i figur 2.2



Figur 2.2: De forskellige projektioner af en Δ -transformation

Mulighederne er altså a) ingenting, b) et hjørnepunkt i knuden, c) et over- eller underløb, eller d) et kryds. Hvis du ser lidt nærmere på det, så svarer de fire tilfælde præcist til $R0 - R3$.

Den vigtigste idé i beviset, er at få lavet en inddeling. Hvis du ikke er helt overbevist om, at det kan lade sig gøre, kan du se på eksemplet i figur 2.3 – her er det ikke så svært at se, hvad man skal gøre.



Figur 2.3: Ekstrainddeling

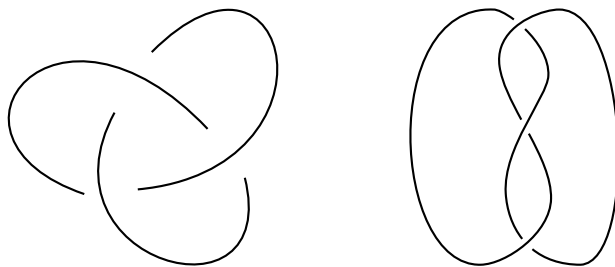
Enhver Δ -transformation kan altså opdeles i endeligt mange mindre Δ -transformationer, som hver svarer til en reidemeistertransformation. Altså vil en endelig række af Δ -transformationer af en knude kunne skrives som en – muligvis lidt længere – endelig række af Reidemeistertransformationer på et knudediagram.

$\Leftarrow$: Antag, at der findes en endelig række af Reidemeistertransformationer, der tager D til D' . Vi skal vise, at der findes en endelig række af Δ -transformationer, der tager K til K' . Hvis du tænker på udglatningen fra figur 1.8, er det ikke så svært at se, at enhver af de fire Reidemeistertransformationer kan udføres via Δ -transformationer på en knude i $\mathbb{R}^3$. Prøv det. $\square$

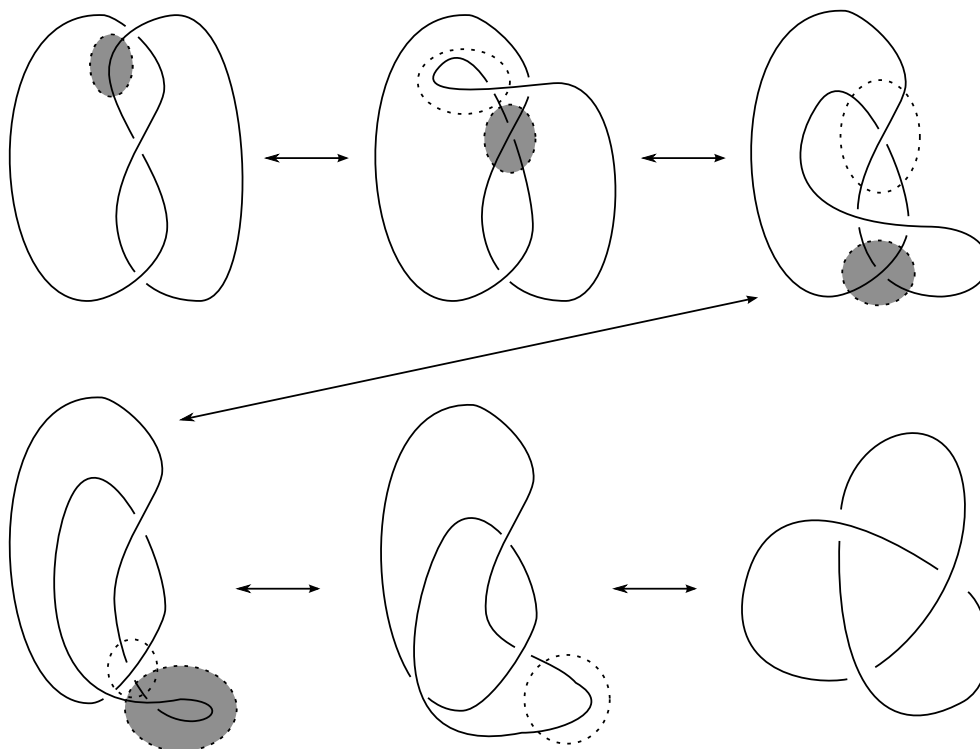
Reidemeisters sætning er ganske bemærkelsesværdig, fordi den siger, at de deformationer, vi laver i 3D, lige så godt kan laves på papiret i 2D. Det gør altså ikke noget, at vi så at sige smider en dimension væk. Tænk på et satellitfoto af en storby. Her tager man også noget 3-dimensionelt, nemlig byen med dens højhuse, og gør til noget

2-dimensionelt. På fotografiet mister man fornemmelsen af højhusenes størrelsesforhold. Det sker naturligvis også, hvis vi ser på projektionen af en knude. Men i og med, at vi indfører de små lufthuller i hvert kryds, får vi en indikation af, hvordan knudens dele krydser hinanden. Reidemeisters sætning siger, at denne lille modifikation er nok til, at vi kan nøjes med at se på knudediagrammer.

Det vigtigste spørgsmål i knudeteori er om to knuder er ens. Nu har vi tre ekstra deformationer, som vi kan bruge til at undersøge, om to givne knuder er ens. Selvom vi har fået flere deformationer, betyder det ikke, at det nu er blevet let at afgøre, om to knuder er ens. Tag f.eks. følgende to knudediagrammer.



Disse to diagrammer viser den samme knude. Det kan vi vise ved at lave en følge af Reidemeistertransformationer fra det ene diagram til det andet. Det er gjort i figur 2.4.



Figur 2.4: Ækvivalens af diagrammer

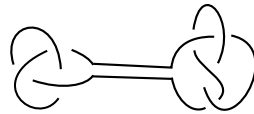
Indtil nu har vi kun haft Reidemeistertransformationer til at afgøre, om to diagrammer repræsenterer den samme knude. Som eksemplet viser, så er det ikke særlig

effektivt. Vi skal have nogle flere værktøjer. Disse værktøjer hedder *knudeinvarianter*.

Det som knudeteoretikere har forsøgt på i mange år er, at få klassificeret alle knuder. Det vil sige, få lavet en udtømmende liste over alle de knuder, der findes. Står du med en knude, vil vi gerne kunne finde den tilhørende knude i tabellen.

2.2 Primknuder

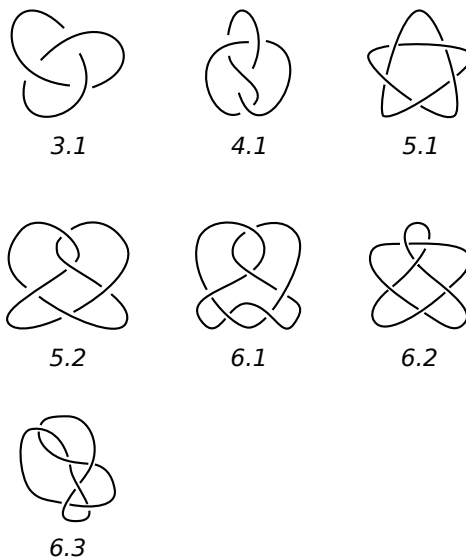
Ganske som du kender det fra heltal, hvor nogle af tallene er primtal, findes der *primknuder*. Disse kan ikke splittes op i summen af to andre knuder. Man kan lave summen af to knuder ved at gøre som i figur 2.5. Her er det summen af det spejlede trekløver og figur-8. Summen af to knuder K_1 og K_2 betegnes med $K_1 \# K_2$.



Figur 2.5: Sum af to knuder

Man kan faktisk vise, at enhver knude er en sum af primknuder. Tilmed er der kun én måde at få hver knude. Det er meget svære end at vise, at ethvert heltal har præcis én opsplætning i primtal.

Figur 2.6 viser alle primknuderne med op til 6 krydsninger.



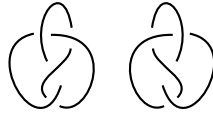
Figur 2.6: Primknuder med op til 6 krydsninger

2.3 Opgaver

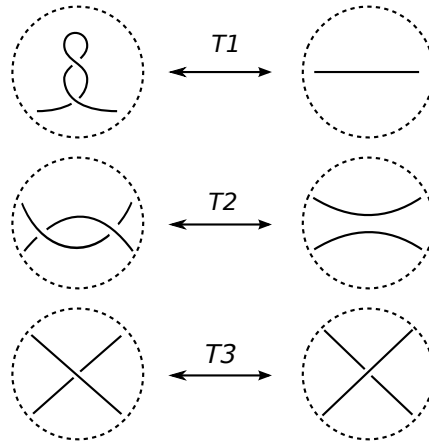
Opgave 2.4. Et diagram af en knude tegnes på en transparent, og vises på et lærred med en overheadprojektor. Hvis du vender transparenten om, hvilken knude vil du så se?

Opgaver

Opgave 2.5. Vis at nedenstående figur-8 diagram er ækvivalent til det spejlede diagram, ved at finde en række Reidemeistertransformationer fra det ene digram til det andet.



Opgave 2.6. I Reidemeisters sætning beviste vi, at det præcist var $R0$, $R1$, $R2$ og $R3$, vi skulle bruge for at vise ækvivalens af to knuder. Men dermed har vi ikke udelukket, at der kunne være et andet sæt af transformationer, som havde samme egenskab. Måske kunne vi udvide vores fire transformationer med en femte transformation? Forklar, hvad der ville ske, hvis hver af de tre transformationer i figur 2.7 blev taget med som en Reidemeistertransformation.



Figur 2.7: Ekstra transformationer

Opgave 2.7. Færdiggør beviset for Reidemeisters sætning.

Kapitel 3

Knudeinvarianter

Først skal vi se på lidt notation. Hvis f er en funktion mellem to mængder A og B skriver vi

$$f : A \rightarrow B.$$

Altså tager f et element $a \in A$ og giver et element $f(a) = b \in B$. Vi definerer mængden af alle knuder ved

$$\mathcal{K} = \text{'mængden af alle knuder'}.$$

Definition 3.1. En *knudeinvariant* er en funktion $f : \mathcal{K} \rightarrow M$, fra mængden af alle knuder til en given mængde M , der opfylder

$$K \sim K' \Rightarrow f(K) = f(K').$$

Bemærkning 3.2. Mængden M kan her være f.eks. $\mathbb{N}$ eller Laurentpolynomierne $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$.¹ Hvis $M = \mathbb{N}$, betyder det, at vi til enhver knude tilknytter et tal, og dette tal ændrer sig ikke under Reidemeistertransformationer.

Bemærkning 3.3. Det er vigtigt her at være opmærksom på retningen af implikationspilen i definitionen. Fordi, hvis man med en knudeinvariant, f , får at, $f(K) = f(K')$ for to knuder K og K' , er det ikke sikkert, at $K \sim K'$. Det kan meget vel være, at det forholder sig sådan, men man kan ikke bruge den knudeinvariant til at afgøre det. Hvis man derimod får, at $f(K) \neq f(K')$ kan man være sikker på at $K \not\sim K'$. Fordi, hvis $K \sim K'$ giver definitionen af en knudeinvariant, at $f(K) = f(K')$. Derfor er K og K' altså ikke ens.

Der findes mange forskellige knudeinvarianter. I resten af denne note skal vi se på nogle forskellige knudeinvarianter og undersøge nogle af deres egenskaber. Et af knudeteoriens bedste knudeinvarianter er Jones-polynomiet, som vi skal behandle i kapitel 4.

3.1 Trefarvning

Vores første eksempel på en knudeinvariant er trefarvning.

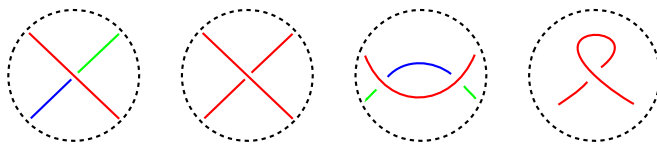
Definition 3.4. Lad D være et knudediagram. En *trefarvning* af D er en tilordning af tre farver til buerne i D , dvs. til de ubrudte linjer. Tilordningen skal laves, så der for hvert kryds i D gælder en af følgende to muligheder:

- Alle buer har samme farve

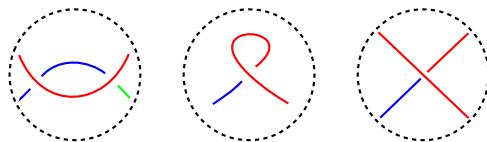
¹Laurentpolynomierne er defineret i afsnit 4.1

- Alle buer har forskellige farver.

Eksempel 3.5. Vælg tre farver: rød, blå og grøn. Vi ser på forskellige udsnit af et knudediagram. Figur 3.1 giver eksempler på *lovlige trefarvninger* og figur 3.2 giver eksempler på *ulovlige trefarvninger*.



Figur 3.1: Lovlige trefarvninger



Figur 3.2: Ulovlige trefarvninger

Eksempel 3.6. Figur 3.3 giver et eksempel på en lovlig trefarvning af trekløveret.



Figur 3.3: Trefarvning af trekløveret

Ethvert diagram har mindst tre trefarvninger, fordi en ensfarvning med hver af de tre farver giver en lovlig trefarvning af knudediagrammet.

Vi er nu i stand til at definere vores første knudeinvariant.

Definition 3.7. Lad D være et knudediagram. Vi definerer $\tau(D) =$ Antallet af trefarvninger af D . Lad $\mathcal{D}$ betegne mængden af knudediagrammer. Da er τ en funktion $\tau : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{N}$.

Sætning 3.8. τ er en knudeinvariant.

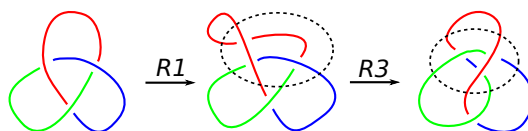
Bevis. I forhold til definition 3.1, skal vi vise, at τ er en funktion fra mængden af knuder, $\mathcal{K}$, og ikke blot mængden af knudediagrammer. For at overføre vores funktion fra knudediagrammer til knuder skal vi naturligvis bruge sætning 2.1.

Sætning 2.1 giver, at vi kan opfatte τ som en funktion på mængden af knuder, hvis τ ikke ændrer sig under Reidemeistertransformationerne. Da vil τ give samme værdi på alle knudediagrammer tilhørende samme knude.

I det følgende skal vi hele tiden referere til illustrationerne figur 2.1.

Vi skal vise, at hver eneste gang vi har en trefarvning af venstresiden, så vil det give en trefarvning af højresiden – og omvendt. Reidemeistertransformationerne udtaler

sig kun om, hvad der sker lige omkring et enkelt kryds. Men vores trefarvninger er farvninger af hele diagrammet. Når vi derfor ser på knuderne i hvert kryds, så er det vigtigt, at farven på strengenes ender er de samme på både højre og venstre side af diagrammet, ellers kan vi ikke se isoleret på denne del af diagrammet. For at vise, at trefarvning er en knudeinvariant, skal man altså vælge sig en trefarvning af venstresiden og tjekke, at man kan lave en trefarvning af højresiden, der har samme farver på de strenge, der går ud af diagrammet. Se figur 3.4 for et eksempel.

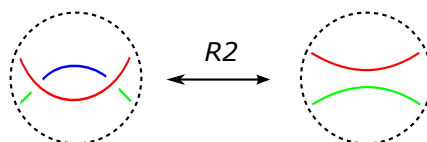


Figur 3.4: Reidemeistertransformation på et trefarvet trekløver

R0: Det er klart, at dette ikke ændrer antallet af mulige trefarvninger, da der ikke er nogen kryds involveret i diagrammet.

R1: En trefarvning af venstresiden må nødvendigvis have samme farve på begge buer, da en flerfarvning af et twist var et eksempel på en ulovlig farvning. Derfor er der præcist tre måder at farve hvert diagram på.

R2: På venstresiden er der først og fremmest de tre trefarvninger, hvor diagrammet farvelægges med samme farve hele vejen igennem. Denne type af farvninger har vi naturligvis også på højresiden. For farvninger med forskellige farver, er der til hvert valg af farve af øverste bue to lovlige konfigurationer, af de resterende tre buer. Se figur 3.5 hvordan en trefarvning af venstresiden passer med en trefarvning af højresiden. I alt har vi seks forskellige farvninger, hvor der bruges mere end 1 farve. Prøv selv at tegne efter. Det giver altså $3 + 6 = 9$ mulige trefarvninger af venstre diagram. Diagrammet til højre kan også farves på 9 måder, da der ikke er nogen krydsninger, og derfor ikke nogen begrænsninger på, hvordan diagrammerne kan farvelægges. Altså kan den ene bue farves på tre forskellige måder og den anden også på tre forskellige måder. Altså $3 \cdot 3 = 9$ trefarvninger.

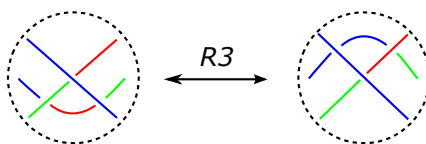


Figur 3.5: Trefarvning af *R2*

R3: Lad os igen tage udgangspunkt i venstresiden. Hvis vi ser på de tre ender til venstre, og forsøger at bestemme en farvning af diagrammet ud fra disse tre, skal vi betragte fem forskellige tilfælde. Alle tre ender kan farves ens. Alle ender kan farves forskellige. To ender kan have samme farve mens den sidste ende har en anden farve. Den sidste mulighed dækker over tre kombinationer, hvor det enten er øverste, midterste eller nederste ende, der ikke har samme farve som de andre. Har vi specificeret farven på hver af de tre ender, bestemmer det en farvning af resten af diagrammet (tjek det). Tilbage er at tjekke, at i hvert tilfælde, har vi en tilsvarende trefarvning af højresiden, med de samme farver på enderne. Se figur 3.6 for et eksempel. Det overlades til læseren at tjekke de resterende tilfælde.

Da det nu er vist at en trefarvning af venstresiden giver anledning til en trefarvning af højresiden, kan vi gøre beviset færdigt ved at henvise til, at vi på samme måde kan se, at en trefarvning af højresiden vil give anledning til en trefarvning af venstresiden.

Vi har altså ikke udregnet det præcise antal trefarvninger, men vi har set, at der er lige mange. Det præcise antal afhænger af, hvordan resten af knuden ser ud.



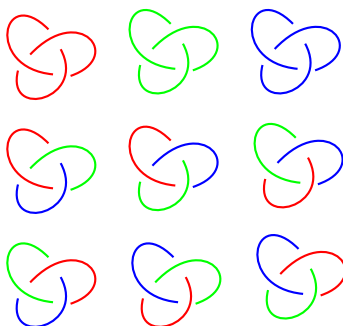
Figur 3.6: Trefarvning af $R3$. Bemærk, at farverne på enderne er de samme på begge sider.

Vi har vist, at Reidemeistertransformationer ikke ændrer på antallet af trefarvninger. Da Δ -transformationer af knuder iflg. beviset for sætning 2.1 kan repræsenteres af Reidemeistertransformationer i knudediagrammer, har vi altså, at

$$K \sim K' \Rightarrow \tau(K) = \tau(K'),$$

og dermed er sætningen bevist. $\square$

Eksempel 3.9. Når vi nu ved, at trefarvning er en knudeinvariant, så kan vi *bevise*, at trekløveret ikke kan filtreres ud til en cirkel. Trekløverets 9 trefarvninger ses på figur 3.7.



Figur 3.7: De 9 trefarvninger af trekløveret

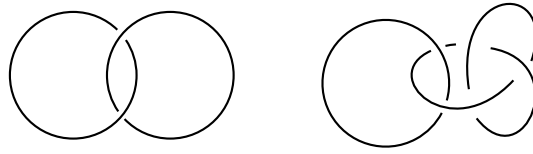
Cirklen har kun de tre ensfarvninger, da der ikke nogen krydsninger. Det kontraponderede af udsagnet i definition 3.1 er, at $\tau(K) \neq \tau(K') \Rightarrow K \not\sim K'$. Da vi lige har vist, at τ er en knudeinvariant, gælder dette for τ , og derfor er $\bigcirc \not\sim \bigcirc$.

Vi har altså vist, at trekløveret ikke er ækvivalent med den trivielle knude. Altså findes der knuder, som ikke kan filtreres ud.

3.2 Linktal

Fremtil nu har vi kun set på knuder, altså en enkelt snor som er limet sammen i enderne. Men man kan naturligvis også have links, hvor flere knuder linker sammen. En knude regnes også som et link – dog et uinteressant link, da det ikke sidder sammen med nogen andre knuder. I figur 3.8 ser vi *Hopf-linket* til venstre og til højre den trivielle knude linket sammen med trekløveret.

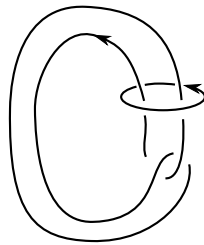
Linktal



Figur 3.8: Linket til venstre er *Hopf-linket* og linket til højre er den trivielle knude linket med trekløveret.

Definition 3.10. En *orienteret knude*, er en knude, som har fået en gennemløbsretning. Det markeres på et knudediagram ved at give en bue en pil. Se eksemplet nedenfor.

Et *orienteret link* er et link bestående af orienterede knuder.

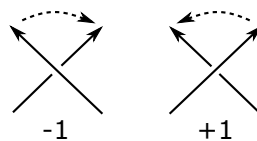


Figur 3.9: Et orienteret link

En anden invariant, der er særlig let at beregne er *linktallet* af et orienteret link. Det beregnes igen vha. et diagram af linket. Vi skal igen bruge Reidemeisters sætning til at bevise, at linkinvarianten er uafhængig af valget af linkdiagram. Det vil betyde, at linktallet virkelig kun afhænger af det oprindelige link.

Definition 3.11. Lad D være et diagram af et orienteret link. *Linktallet* $Lk(D)$ defineres ved at summere alle fortegn på krydsninger, hvor to buer fra forskellige knuder er involveret. Divider dette tal med to. Da er $Lk : \mathcal{D}_L \rightarrow \mathbb{Z}$, hvor $\mathcal{D}_L$ er mængden af orienterede linkdiagrammer.

En krydsnings fortegn er givet ved følgende to billeder.

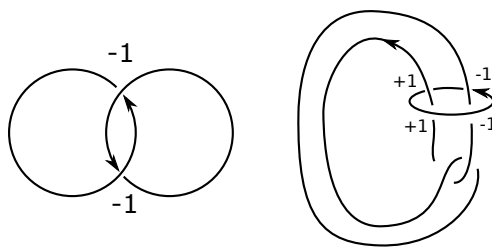


Figur 3.10: Fortegn

Fortegnet bestemmes ved, at se på den øverste bue. Hvis pilen på buen skal drejes *mod* uret for at komme ovenpå pilen på den nederste bue er fortegnet $+1$. Hvis pilen på øverste bue skal drejes *med* uret er fortegnet -1 . Man skal dreje pilen i den korteste retning. Som udgangspunkt kan man dreje begge pile i figur 3.10 270° i den modsatte retning.

Eksempel 3.12. Her er linktallet beregnet for to forskellige links, nemlig Hopf-linket til venstre og *Whitehead-linket* til højre.

Linktal



Hopf-linket har to forskellige orienteringer, en der giver $Lk = -1$ og en, der giver $Lk = +1$. Vi skal se nedenfor, at linktallet er en linkinvariant, og derfor er disse forskellige orienterede links. Desuden betyder det også, at da linket der består af to ulinkede cirkler, kaldet *ikke-linket*, har $Lk = 0$, er Hopf-linket og ikke-linket altså to forskellige links. Linktallet kan vi dermed fortolke som et udtryk for, hvormange gange to knuder linker sammen. Men som det også ses af beregningen af linktallet for Whitehead-linket (nedenfor), skal man være en smule varsom med denne fortolkning. Whitehead-linket har nemlig et linktal på 0, men det er helt klart, at de to knuder faktisk er linket.

Som det ses af tegningen er fortegnet af begge krydsningerne til venstre +1 og krydsningerne til venstre -1, altså er

$$Lk(\text{Whitehead-link}) = \frac{1}{2}(1 + 1 - 1 - 1) = 0.$$

Sætning 3.13. Hvis D, D' er to diagrammer af samme orienterede link, da er $Lk(D) = Lk(D')$, og derfor er dette tal en invariant, kaldet linktallet af linket L . Lk er altså en funktion fra mængden af orienterede links til heltallene, $Lk : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}$, der opfylder, at $L \sim L' \Rightarrow Lk(L) = Lk(L')$.

Bemærkning 3.14. Når vi ser på orienterede links, skal vores Reidemeistertransformationer modificeres lidt. Vi må ikke ændre på retningen af buerne under en Reidemeistertransformation. Men ellers virker alt andet, og Reidemeisters sætning gælder også for orienterede links.

Bevis. De to diagrammer D, D' adskiller sig ved en række orientede Reidemeistertransformationer, så det eneste, der skal tjekkes er, at linktallet er bevaret under Reidemeistertransformationerne. $R0$ ændrer klart ingenting. I $R1$ har venstresiden en krydsning, men det er en selvkrydsning, så dens fortegn skal ikke tælles med i linktallet. I $R2$ har venstresiden to ekstra krydsninger: enten er de to buer fra samme knude, ellers er buerne fra to forskellige knuder. I første tilfælde skal krydsene ikke tælles med. I andet tilfælde skal krydsene tælles med, og heldigvis er deres fortegn det modsatte af hinanden, og derfor vil krydsningen ikke bidrage.

I $R3$ har hver af de tre krydsninger på venstresiden et tilsvarende kryds på højresiden, der vil give samme bidrag til linktallet – uafhængigt af om krydset skal tælles med eller ej. Altså er summen af de tre fortegn på hver side den samme. $\square$

Bemærkning 3.15. Det blev bemærket i definitionen på et link, at en knude også selv er et link, så $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$, og da $Lk : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}$, er Lk også en knudeinvariant. Men da der ikke er noget kryds i en knude, hvor de to buer hører til to forskellige knuder, er $Lk(K) = 0$ for enhver knude. Linktallet giver den samme værdi til alle knuder, og er derfor en totalt ubrugelig knudeinvariant. Linktallet er dog en ganske god linkinvariant.

Bemærkning 3.16. I eksempel 3.12 er det vist, at Hopf-linket og to ulinkede cirkler ikke er ens.

Opgaver

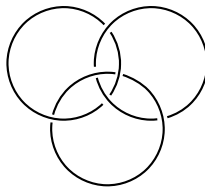
Vi har dermed *bevist*, at tryllekunstnere snyder, når de laver deres trick med to linkede metalringe pludselig bliver ulinkede. Det vidste vi naturligvis godt i forvejen, men her har vi et skudsikkert bevis for det.

Vi har nu to eksempler på linkinvarianter (vi viste det godt nok ikke, men faktisk er trefarvning en linkinvariant, vores bevis kan også bruges direkte på links). Som vi har set, er de ikke ret gode. For opgave 3.19 viser, at trefarvningen ikke kan adskille figur-8 og den trivielle knude, mens linktallet ikke kunne adskille Whitehead-linket og en knude. Derfor er vores to eksempler ikke særlig gode. Vi skal derfor have konstrueret en meget bedre linkinvariant. Nemlig *Jones-polynomiet*.

3.3 Opgaver

Opgave 3.17. Find antallet af forskellige trefarvninger af 4.1-knuden i figur 2.6. Du skal få, at der kun er tre forskellige trefarvninger. Dermed er trefarvningen af 4.1-knuden og den trivelle knude ens. Men vi kan jo godt se, at de to knudediagrammer ikke giver den samme knude, da 4.1-knuden tydeligvis er filtret. Da trefarvningen ikke kan adskille to helt åbentlyst forskellige knuder, er det en dårlig knudeinvariant.

Opgave 3.18. Beregn linktallet for Borromeo-linket, ved at vælge en orientering på hver af cirklerne. Afhænger svaret af orienteringen?



Figur 3.11: Borromeo linket

Opgave 3.19. I eksempel 3.12 blev det vist, at linktallet ikke kunne adskille Whitehead-linket og det trivelle link bestående af to ulinkede cirkler. Vis, at Whitehead-linket er forskelligt fra det trivielle link ved at bruge trefarvning.

Opgave 3.20. Bevis, vha. trefarvning, at Hopf-linket er forskelligt fra det trivielle link. I eksempel 3.12 blev dette vist vha. linktallet.

Opgave 3.21. Færdiggør beviset for sætning 3.8.

Kapitel 4

Jones-polynomiet

Reidemiester beviste sin sætning tilbage i 1927. På samme tid opfandt James Alexander Alexander-polynomiet, som var en klar forbedring af alle de tidligere knude- og linkinvarianter. Opfindelsen betød rigtig meget for klassifikationen af knuder. Man kunne nu effektivt bevise, at to knuder var forskellige ved bare at se på deres Alexander-polynomium. Alexander-polynomiet er ikke så besværligt at beregne, så det satte en smule gang i knudeteorien i de efterfølgende år. Alexander-polynomiet havde dog også en helt åbenlys fejl, for den kunne ikke adskille en knude og dens spejlbillede. Man var mere eller mindre overbeviste om, at trekløveret og dets spejlbillede (se nedenfor) ikke var ens, men Alexander-polynomiet for de to er ens.



Der skulle gå næsten 60 år, før der kom virkelig gang i knudeteorien. Denne gang var det new zealendingen Vaughan Jones, der i 1984 opfandt Jones-polynomiet. Han opdagede det ved lidt af en tilfældighed. Jones kom egentlig fra en hel anden afdeling af matematikken (operatoralgebra), men han opdagede, at hans arbejde kunne bruges i knudeteori. I modsætning til Alexander-polynomiet kan Jones-polynomiet adskille trekløveret og dets spejling. Da Jones-polynomiet tilmed ikke er så svært at beregne, blev Jones' opfindelse startskuddet på en opblomstring af knudeteorien. Kort tid efter viste det sig, at Jones-polynomiet havde en meget vigtig anvendelse i teoretisk fysik, og da man først opdagede dette blev knudeteori et særdeles populært forskningsområde, og er det stadig. Jones fik i 1990 Fieldsmedaljen for opfindelsen af polynomiet. Der findes ikke nogen Nobelpris i matematik, men derimod er Fieldsmedaljen den største udmærkelse en matematiker kan få. Tilmed må modtageren ikke være fyldt 40 år ved modtagelsen.

4.1 Laurentpolynomier

Inden vi kan definere Jones-polynomiet, skal vi først have defineret hvad et polynomium er.

Definition 4.1. Et polynomium er en funktion, der følger en bestemt forskrift. Forskriften for et polynomium er en sum af nogle led, typisk sorteret efter faldende potens af A . Potensen skal være et helt tal.

$$p(A) = b_n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \cdots + b_1 A + b_0.$$

Tallene $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots$ kaldes koefficienterne. Koefficienterne kan f.eks. være reelle tal, hele tal eller naturlige tal, hvor mængden af alle polynomier skrives som hhv. $\mathbb{R}[A]$, $\mathbb{Z}[A]$ eller $\mathbb{N}[A]$.

Hvis b_n er den største koefficient hvor $b_n \neq 0$ kaldes p for et n 'te-gradspolynomium.

Eksempel 4.2. Vi kender allerede til andengradspolynomier, nemlig polynomier på formen $p(x) = ax^2 + bx + c$, som har nulpunkterne $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Et tredjegrads-polynomium er f.eks. $p(A) = A^3 + 3A^2 + 13$, mens $p(A) = A^7 - A^5 + A^3 + 19$ er et eksempel på et 7.grads-polynomium.

$p(A) = A^4 - 2A^2 + A^{\frac{3}{2}} + 10$ er ikke et polynomium, da potensen af leddet $A^{\frac{3}{2}}$ ikke er et helt tal.

Definition 4.3. For at definere Jones-polynomiet skal vi kende til *Laurentpolynomierne*, $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$. Dette er også polynomier men her tager vi også den negative potens af A i brug. Altså funktioner på formen

$$p(A) = b_n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 + b_{-1} A^{-1} + \dots + b_{-k+1} A^{-k+1} + b_{-k} A^{-k},$$

hvor $b_i \in \mathbb{Z}$.

Vi vil ikke definere Jones-polynomiet, som Vaughan Jones gjorde det. Vi vil derimod tage Louis Kauffmans tilgang, som han lavede kort efter Jones' opfindelse. Kauffman definerede Kauffman-parentesen, der næsten er en invariant.

4.2 Kauffman-parentesen

Definition 4.4 (Kauffman-parentesen). Kauffman-parentesen er en funktion fra uorienterede linkdiagrammer til Laurentpolynomier i variabelen A . Funktionen tager et diagram D til $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ og er defineret ved

- (i) $\langle \bigcirc \rangle = 1$
- (ii) $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle$
- (iii) $\langle \times \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \asymp \rangle$

Her betyder $\bigcirc$ den trivielle knudes diagram, der ikke har nogen krydsninger, og $D \sqcup \bigcirc$ er diagrammet bestående af diagrammet D sammen med en ekstra $\bigcirc$ der ikke har nogen fælles krydsninger med D . I (iii) henvises der til tre linkdiagrammer der er ens over det hele på nær omkring ét punkt, hvor de er forskellige på den anviste måde. (iii) kaldes udglatning af et kryds.

En måde at huske (iii) på, er motorvejsreglen. Du skal se krydset som en motorvej med en bro henover. Du kører ad den nederste streng, som er motorvejen, og vil dreje fra motorvejen, op på broen der krydser motorvejen. Du kan vælge, at gøre to ting. Dreje af til højre. Det er det rigtige at gøre, i forhold til danske trafikregler. Det giver A 'et en positiv eksponent. Altså giver afkørsel til højre $A \langle \rangle \langle \rangle$. Du kan også vælge den forkerte løsning, og dreje til venstre – altså gennem den anden vognbane. Det er naturligvis en dårlig ide, og derfor giver det en negativ eksponent til A . Altså giver afkørsel til venstre $A^{-1} \langle \asymp \rangle$.

Bemærkning 4.5. Vi kan se på den omvendte krydsning af (iii), $\langle \times \rangle$, og beregne værdien, ved blot at rotere (iii) 90° mod uret. Det giver os følgende lighed, hvor højresiden er den samme som i (iii) med A erstattet af A^{-1} og A^{-1} med A .

$$\langle \times \rangle = A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle + A \langle \asymp \rangle \quad (4.1)$$

Med $\overline{D}$ betegner vi spejlingen af D – altså diagrammet, med alle krydsninger byttet om – spejlingen af venstresiden i (iii) er venstresiden i formel (4.1). Beregningen i formel (4.1) betyder, at $\langle \overline{D} \rangle = \overline{\langle D \rangle}$, hvor overstregning af Kauffman-parentesen betyder, at A byttes ud med A^{-1} og omvendt.

Kauffman-parentesen af et link med n krydsninger beregnes ved at udføre (iii) på hvert af de n kryds, derefter spalte cirkler fra med (ii) og summe alle disse led. Den sidste cirkel slipper man af med vha. (i). Det giver i alt 2^n forskellige diagrammer, der skal tegnes og regnes på. Det kan synes meget besværligt, men vi skal se nogle måder, hvorpå man kan gøre ens arbejde en smule nemmere. Alt i alt giver Kauffman-parentesen altså et Laurent-polynomium.

Det er klart, at Kauffman-parentesen ikke ændres ved et $R0$, men hvis et diagram ændres med en af de andre Reidemeistertransformationer kan det være, at polynomiet i sidste ende er anderledes. Men præcist hvilken effekt Reidemeistertransformationerne har på Kauffman-parentesen, vil vi nu undersøge.

Lemma 4.6. *Hvis et diagram ændres med en $R1$ Reidemeistertransformation, så ændres Kauffman-parentesen på følgende måde:*

$$\langle \text{⌚} \rangle = -A^3 \langle \text{⌢} \rangle, \quad \langle \text{⌚} \rangle = -A^{-3} \langle \text{⌢} \rangle$$

Bevis.

$$\begin{aligned} \langle \text{⌚} \rangle &= A \langle \text{⌚} \rangle + A^{-1} \langle \text{⌚} \rangle \\ &= A(-A^{-2} - A^2) \langle \text{⌢} \rangle + A^{-1} \langle \text{⌢} \rangle \\ &= (A(-A^{-2} - A^2) + A^{-1}) \langle \text{⌢} \rangle \\ &= -A^3 \langle \text{⌢} \rangle \end{aligned}$$

Dette viser den første ligning. Den anden ligning vises på samme måde, eller ved at henvise til bemærkningen omkring spejling af diagrammerne. Prøv, om du kan vise anden lighed selv ved at lave beregningerne, det er god træning. $\square$

Disse to beregninger er meget nyttige og vil blive brugt flittigt i det følgende. For nu ved vi, hvordan Kauffman-parentesen ændrer sig under $R1$. Allerede nu ved vi, at Kauffman-parentesen ikke kan være en invariant. For så skulle $\langle \text{⌚} \rangle = \langle \text{⌢} \rangle$. Vi skal dog se, at Kauffman-parentesen faktisk ikke ændrer sig under $R2$ og $R3$. Dermed er den så tæt på at være en invariant, som den næsten kan. Inden vi viser det, skal vi have lidt mere træning i at regne med Kauffman-parentesen.

Eksempel 4.7. Lad os bruge lemma 4.6 til at beregne Kauffman-parentesen af det uorienterede Hopf-link.

$$\begin{aligned} \langle \text{⌚} \rangle &= A \langle \text{⌚} \rangle + A^{-1} \langle \text{⌚} \rangle \\ &= -A^4 \langle \text{⌢} \rangle - A^{-4} \langle \text{⌢} \rangle \\ &= -A^4 - A^{-4}. \end{aligned}$$

Hvor midterste lighed kommer fra lemma 4.6 og sidste lighed fra (i).

Eksempel 4.8. Vi skal nu bruge lemma 4.6 til at beregne Kauffman-parentesen af trekløveret.

$$\begin{aligned} \langle \text{⌚} \rangle &= A \langle \text{⌚} \rangle + A^{-1} \langle \text{⌚} \rangle \\ &= A^7 + A^{-1}(-A^4 - A^{-4}) \\ &= A^7 - A^3 - A^{-5}. \end{aligned}$$

Vridningstal

I miderste lighed er eksempel 4.7 brugt til at finde Kauffman-parentesen af Hopf-linket, og lemma 4.6 er brugt to gange til at beregne den sidste parentes.

Lemma 4.9. *Ændres et diagram med en $R2$ eller en $R3$ Reidemeistertransformation, ændres Kauffman-parentesen ikke. Det vil sige,*

$$(a) \langle \text{diagram} \rangle = \langle \text{diagram} \rangle$$

$$(b) \langle \text{diagram} \rangle = \langle \text{diagram} \rangle$$

Bevis. (a)

$$\begin{aligned} \langle \text{diagram} \rangle &= A \langle \text{diagram} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagram} \rangle \\ &= -A^{-2} \langle \text{diagram} \rangle + \langle \text{diagram} \rangle + A^{-2} \langle \text{diagram} \rangle \\ &= \langle \text{diagram} \rangle \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \langle \text{diagram} \rangle &= A \langle \text{diagram} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagram} \rangle \\ &= A \langle \text{diagram} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagram} \rangle \\ &= \langle \text{diagram} \rangle \end{aligned}$$

Her følger anden lighed ved at bruge (a) to gange på første led. □

Lemma 4.9 viser, at Kauffman-parentesen ikke ændrer sig under $R2$ og $R3$. Dermed er Kauffman-parentesen næsten linkinvariant, men ikke helt. Selv under $R1$ ændres Kauffman-parentesen ikke særlig meget, den multipliceres blot med $-A^{\pm 3}$, afhængigt af hvordan twistet er.

Kauffman-parentesen er defineret på uorienterede linkdiagrammer. Vi kunne give linket en orientering, uden, at det betød noget for Kauffman-parentesen. Orienteringen giver alle kryds – også de, der er mellem dele af samme knude – et fortegn som i definition 3.11. Nu vil fortegnet kunne opfange, hvilket type twist der er tale om. Med fortegnet vil vi modificere Kauffman-parentesen en smule, så den bliver en linkinvariant.

4.3 Vridningstal

Definition 4.10. Lad D være et diagram af et orienteret link. Vridningen af D , $w(D)$, er summen af alle fortegn af krydsninger i D .

Bemærkning 4.11. Vridningstallet er noget andet end linktallet, da vi her tæller knudernes selvkrydsninger med, og derudover er der ikke den faktor $\frac{1}{2}$, som linktallet har.

Lemma 4.12. *Vridningstallet af et orienteret linkdiagram ændres ikke under $R2$ og $R3$ men ændres med ± 1 under $R1$.*

Bevis. Dette bevis ligner meget beviset for, at Lk er en linkinvariant (beviset for sætning 3.13). For $R2$ og $R3$ er det faktisk endnu lettere, da vi ikke behøver at tænke på om strengene kommer fra samme knude eller ej. Vi kan derfor blot henvise til beviset for sætning 3.13 og genbruge det. Derfor ændrer vridningstallet sig ikke under $R2$ og $R3$.

Under $R1$ sker der helt klart noget. Det er lidt overraskende, at følgende ligheder gælder uafhængigt af, hvordan knuden er orienteret. Det er en lille øvelse at vise, at lighederne gælder.

$$\begin{aligned} w(\text{↗↘}) &= w(\text{↘↗}) - 1 \\ w(\text{↘↗}) &= w(\text{↗↘}) + 1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

□

Bemærkning 4.13. Man kan med rette undre sig over, at det overhovedet er nødvendigt at orientere sit link, for at kunne definere vridningen af et link. Ovenstående ligheder viser netop, at vridningen af et twist er uafhængigt af twistets orientering. Svaret er dog, at godt nok afhænger vridningen af antallet af twists, men det afhænger i høj grad også af, om linkets resterende krydsninger er positive eller negative. For at afgøre det, skal vi orientere vores link.

4.4 Jones-polynomiet

Idéen er nu, at bruge vridningen af et orienteret diagram til at gøre Kauffman-parentesen til en linkinvariant.

Sætning 4.14. *Lad D være et orienteret linkdiagram, af det orienterede link $L \in \mathcal{L}$. Polynomiet*

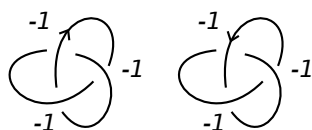
$$V_L(A) = (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle$$

er invariant under alle tre Reidemeistertransformationer, og definerer derfor en invariant af orienterede links. Dermed er V en funktion fra mængden af orienterede links, $\mathcal{L}$, til Laurentpolynomierne $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$. $V : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$. Denne invariant kaldes Jones-polynomiet.

Bevis. Da både vridningstal og Kauffman-parentes er uforandrede af $R2$ og $R3$, er det klart, at V_L heller ikke ændrer sig under $R2$ eller $R3$ Reidemeistertransformationer af D . Tilbage er blot $R1$.

Hvis diagrammet D ændres ved at fjerne et positivt twist et sted på linket, så har vi set i lemma 4.6, at der bliver ganget $(-A^3)$ på Kauffman-parentesen. Tilmed giver formel (4.2), at vridningstallet stiger med 1. Derfor har vi ganget faktoren $(-A)^{-3w(D)}$ på Kauffman-parentesen, så denne faktor kan modvirke twistets effekt på Kauffman-parentesen. Dermed er V_L uforandret af $R2$, $R3$ og positive twists. Tilfældet med de negative twists vises på tilsvarende måde. Dermed er V_L en linkinvariant, iflg. Reidemeisters sætning. □

Bemærkning 4.15. I definitionen af Kauffman-parentesen sørgede vi for, at $\langle \bigcirc \rangle = 1$ og vridningen af $\bigcirc$ er tydeligvis også 0. Derfor er $V_{\bigcirc} = 1$. Man ved endnu ikke, om der findes knuder, som også har 1 som Jones-polynomium, eller om $\bigcirc$ er den eneste. Man tror, $\bigcirc$ er det eneste, men ingen har hidtil kunnet bevise det. Man kan dog finde to knuder, som man ved er forskellige, men som har samme Jones-polynomium. Man ved, at de to knuder er forskellige, ved at beregne andre knudeinvarianter. Jones-polynomiet er dermed ikke perfekt, men det er stadig en meget kraftig knudeinvariant, da man uden alt for meget besvær kan programmere en computer til at beregne Jones-polynomiet for en tilfældig knude.



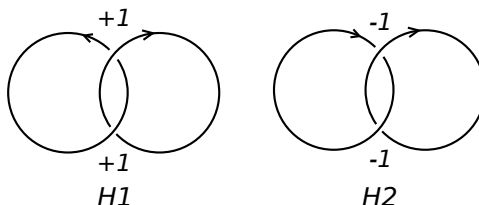
Eksempel 4.16. Vi skal nu beregne Jones-polynomiet af trekløveret. I eksempel 4.8 blev Kauffman-parentesen af trekløveret beregnet, så vi skal blot finde vridningen af trekløveret, når vi har valgt en orientering.

Vi ser af illustrationen, at $w(3_1) = -3$ ligemeget¹, hvilken orientering vi har valgt, og dermed er

$$\begin{aligned} V_{3_1}(A) &= (-A)^{-3w(3_1)} \langle 3_1 \rangle = (-A)^{(-3) \cdot (-3)} (A^7 - A^3 - A^{-5}) \\ &= -A^{16} + A^{12} + A^4. \end{aligned}$$

Bemærkning 4.17. Jones-polynomiet er defineret på mængden af orienterede links. Det vil sige, at hvis du ændrer orienteringen af en af knuderne i linket, vil du muligvis få et andet polynomium. Hvis du ændrer orienteringen på alle knuder i linket, har det ingen betydning for vridningen. Det er en øvelse at vise dette. Da en knude er et link bestående af en enkelt knude, vil en ændring af orienteringen ikke betyde nogen ændring af vridningen af knuden. Hvis vi derfor vil beregne Jones-polynomiet af en knude, skal vi bare vælge en tilfældig orientering. Men nedenstående eksempel viser, at orienteringen er vigtig for links. Her er det illustreret blot med Hopf-linket.

Eksempel 4.18. I bemærkning 4.15 er Kauffman-parentesen beregnet for Hopf-linket, og dette bliver udgangspunktet for at beregne Jones-polynomiet for to Hopf-links med forskellige vridningstal.



Vridningstallet for det venstre Hopf-link, $H1$, er $+2$ og dermed bliver Jones-polynomiet $V_{H1}(A) = (-A)^{(-3)^2} (-A^4 - A^{-4}) = -A^{-6} (-A^4 - A^{-4}) = A^{-2} + A^{-10}$.

Vridningstallet for det højre Hopf-link, $H2$, er -2 og dermed bliver Jones-polynomiet $V_{H2}(A) = (-A)^{(-3)(-2)} (-A^4 - A^{-4}) = A^6 (-A^4 - A^{-4}) = -A^{10} - A^2$.

Vi har dermed set, at for links er det vigtigt, at vælge sig en orientering fra starten. Når vi dermed taler om Jones-polynomiet af et link, skal vi specificere en orientering, for som vi ser her, er de to versioner af Hopf-linket to forskellige orienterede links. Man kan altså ikke omdanne $H1$ til $H2$ med de orienterede Reidemeistertransformationer. Glemmer man derimod orienteringen af $H1$ og $H2$, er de tydeligvis ens. Orienteringen er en ekstra struktur, som gør link-verdenen mere mangfoldig.

Proposition 4.19. Lad L være et orienteret link og $\bar{L}$ være dets spejling. Da er $V_{\bar{L}}(A) = V_L(A^{-1})$.

Bevis. Se på formel (4.1) og den efterfølgende bemærkning. En spejling vil blot betyde, at man i Kauffman-parentesen skal skifte A ud med A^{-1} .

¹ 3_1 henviser til figur 2.6

Hvis man spejler et orienteret link, bliver alle positive krydsninger negative og alle negative krydsninger positive. Det vil sige, at $w(\overline{L}) = -w(L)$. Sætter vi det sammen, giver definitionen af Jones-polynomiet det ønskede resultat. $\square$

Korollar 4.20. *Enhver knude, hvor Jones-polynomiet ikke er det samme ved udskiftning af A med A^{-1} , er forskellig fra sit spejlbillede.*

Som det ses af tabel 4.1 er $3_1, 5_1, 5_2, 6_1$ og 6_2 alle forskellige fra deres spejlbilleder. Derimod kan vi ikke sige noget om 4_1 og 6_2 . 4_1 er faktisk lig sit eget spejlbillede, det skal du vise i opgave 2.5.

3_1	$-A^{16} + A^{12} + A^4$
4_1	$A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}$
5_1	$-A^{28} + A^{24} - A^{20} + A^{16} + A^8$
5_2	$-A^{24} + A^{20} - A^{16} + 2A^{12} - A^8 + A^4$
6_1	$A^{16} - A^{12} + A^8 - 2A^4 + 2 - A^{-4} + A^{-8}$
6_2	$A^{20} - 2A^{16} + 2A^{12} - 2A^8 + 2A^4 - 1 + A^{-4}$
6_3	$-A^{12} + 2A^8 - 2A^4 + 3 - 2A^{-4} + 2A^{-8} - A^{-12}$

Tabel 4.1: Jones-polynomium for knuder med op til 6 krydsninger

At danne summen af to knuder er en simpel konstruktion. I afsnit 2.2 definerede vi summen af to uorienterede knuder. Vi kan også tage summen af to orienterede knuder, vi skal bare sørge for, at orienteringerne passer sammen. Derfor kunne vi håbe på, at Jones-polynomiet af summen af to knuder, var let at udtrykke ved Jones-polynomiet af de to knuder hver for sig. Det er heldigvis også tilfældet. Der gælder nemlig, at

$$V_{K_1 \# K_2} = V_{K_1} V_{K_2}. \quad (4.3)$$

Det ses nemmest ved at lave et eksempel, og se, at fremgangsmåden vil generalisere til tilfældet med to vilkårlige knuder. Idéen er at bruge definitionen af Kauffman-parentesen på alle krydsningerne i den ene knude, K_1 , og lade den anden knude, K_2 , være. Til sidst vil vi få, at alle led i Kauffman-parentesen skal ganges med $\langle K_2 \rangle$. Da $w(K_1 \# K_2) = w(K_1) + w(K_2)$ følger formel (4.3) pr. definition af Jones-polynomiet.

Eksempel 4.21. I dette eksempel vil vi beregne Jones-polynomiet af $3_1 \# \overline{3_1}$.

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
 &= A^7 \langle \text{Diagram 4} \rangle + \langle \text{Diagram 5} \rangle + A^{-2} \langle \text{Diagram 6} \rangle \\
 &= (A^7 - A^3 - A^{-5}) \langle \text{Diagram 7} \rangle \\
 &= \langle \text{Diagram 8} \rangle \langle \text{Diagram 9} \rangle
 \end{aligned}$$

Ovenstående beregning viser, at Kauffman-parentesen splittes op som et produkt. Altså at $\langle 3_1 \# \overline{3_1} \rangle = \langle 3_1 \rangle \langle \overline{3_1} \rangle$. Det er tydeligt, at dette eksempel kan generaliseres til enhver sum af to knuder, K_1, K_2 , så vi har $\langle K_1 \# K_2 \rangle = \langle K_1 \rangle \langle K_2 \rangle$.

For at beregne Jones-polynomiet skal vi vælge os en orientering af vores knude. I bemærkning 4.17 blev det nævnt, at vridningstallet for knuder ikke afhænger af orienteringen. Vi kan derfor blot vælge os en tilfældig orientering. Summen af to knuder er konstrueret på en sådan måde, at vi ikke introducerer nye krydsninger.

Derfor er det klart, at $w(K_1 \# K_2) = w(K_1) + w(K_2)$ og særligt gælder altså, at $w(3_1 \# \overline{3_1}) = w(3_1) + w(\overline{3_1})$.

Vi har derfor

$$\begin{aligned} V_{3_1 \# \overline{3_1}}(A) &= (-A)^{-3w(3_1 \# \overline{3_1})} \langle 3_1 \# \overline{3_1} \rangle = (-A)^{-3w(3_1)} \langle 3_1 \rangle (-A)^{-3w(\overline{3_1})} \langle \overline{3_1} \rangle \\ &= V_{3_1}(A) V_{\overline{3_1}}(A) = (-A^{16} + A^{12} + A^4)(-A^{-16} + A^{-12} + A^{-4}) \\ &= -A^{-12} + A^{-8} - A^{-4} + 3 - A^4 + A^8 - A^{12}. \end{aligned}$$

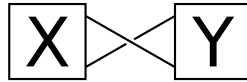
Bemærkning 4.22. Man kan vise, at i Jones-polynomiet af en knude, er potenserne af A altid divisible med 4. Faktisk gælder det for ethvert link, der er sammensat af et ulige antal knuder. Vi har dermed en indikator for, om vores udregninger er rigtige.

4.4.1 Perspektiv

Skal man klassificere alle knuder, er det mest naturlige at se på en knudes umiddelbare egenskaber. Den mest tydelige egenskab er antallet af krydsninger i diagrammet. Lad K være en knude og D et diagram af K . Antallet af krydsninger i D er naturligvis ikke en knudeinvariant. Fordi, hvis der laves både $R1$ eller $R2$ på D , ændres antallet af krydsninger. Reidemeisters sætning giver, at en knudeinvariant ikke må ændre sig under Reidemeistertransformationer. Definer *krydsningstallet* af K som det minimale antal krydsninger i et diagram af K . Krydsningstallet er per definition en knudeinvariant.

Vi vil gerne lave en liste, hvor knuderne er grupperet efter deres krydsningstal. Ganske som vi har gjort det i figur 2.6. For at kunne lave en sådan liste skal vi have en nem måde, at beregne krydsningstallet af en knude på. Som udgangspunkt er det jo nærmest en umulig opgave, da der er uendeligt mange forskellige knudediagrammer, der hører til den samme knude.

Har man leget med Reidemeistertransformationerne, og samtidig tænkt over, hvad der sker med antallet af krydsninger i et diagram, vil det ikke være helt urimeligt, at stille sig selv følgende spørgsmål: Har et reduceret alternerende diagram (dvs. diagrammet ikke er af formen i figur 4.1 og alterende betyder, at diagrammet skiftevis har over- og underkrydsninger) et minimalt antal krydsninger? At det forholder sig sådan, var en formodning, der blev fremsat tilbage i knudeteoriens spæde begyndelse omkring 1880. Formodningen blev lavet af den skotske fysiker Peter Guthrie Tait. Kauffman, Murasugi og Thistlethwaite beviste i 1987 formodningen. Tait formodede også, at ingen knude, der har et reduceret alternerende diagram med vridningstal 0, er lig dens egen spejling. Denne formodning blev bevist i 1988 af Thistlethwaite. Alle formodningerne blev bevist med Jones-polynomiet. Inden Jones-polynomiets opfindelse havde ingen nogen idé om, hvordan formodningerne skulle angribes.



Figur 4.1: Ikke-reduceret diagram

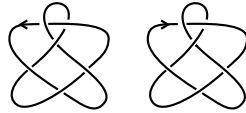
Taits formodninger er ikke Jones-polynomiets eneste anvendelsesmuligheder. En af Jones-polynomiets vigtigste egenskaber er af mere historisk karakter. Som det fremgår af dette kapitel, er Jones-polynomiet en meget effektiv linkinvariant, altså forholdsvist let at beregne, og det kan adskille langt de fleste links. Fordi Jones-polynomiet er effektivt, lagde det, i de følgende år, kimen til en opblomstring af interessante lignende linkinvarianter. Det var særligt, da fysikeren Edward Witten i 1988 gav en forbindelse

Opgaver

mellem Jones-polynomiet og kvantefeltteori, at matematikere og teoretiske fysikere virkelig fik øjnene op for, hvad knudeteorien var i stand til. I dag forskes der stadig meget i knuderne, Jones-polynomiet og dets efterfølgere.

4.5 Opgaver

Opgave 4.23. Beregn vridningstallet af de to orienterede knuder i figur 4.2.



Figur 4.2: 6_2 orienteret på to forskellige måder.

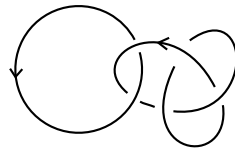
Opgave 4.24. Vis, at vridningen af en knude ikke afhænger af orienteringen. Vink: Se på figur 3.10 og vend orienteringen på de to diagrammer.

Opgave 4.25. Beregn Jones-polynomiet af 4_1 -knuden og bevis, at 4_1 -knuden $\not\approx \bigcirc$.

Opgave 4.26. Beregn Jones-polynomiet af 5_2 -knuden.

Opgave 4.27. Bevis, at 3_1 -knuden og $\overline{3}_1$ -knuden er forskellige knuder, ved at beregne deres respektive Jones-polynomier.

Opgave 4.28. Vis, at Jones-polynomiet af følgende link er $A^{-14} - A^{-10} + A^{-6} - 2A^{-2} - A^6$



Opgave 4.29. Bevis de to ligheder i formel (4.2).

Opgave 4.30. Bevis den manglende lighed i lemma 4.6, ved at lave de konkrete udregninger.

Litteratur

- [1] W.B. Raymond Lickorish. *An Introduction to Knot Theory*. Springer, 1997.
- [2] Justin Roberts. Knot knotes. <http://math.ucsd.edu/~justin/Papers/knotes.pdf>, 1999.
- [3] Mikkel Kamstrup Erlandsen. Knudeteori. <http://www.imf.au.dk/besogsservice/>.
- [4] Alexei Sossinsky. *Knots: Mathematics with a Twist*. Harvard University Press, 2002.