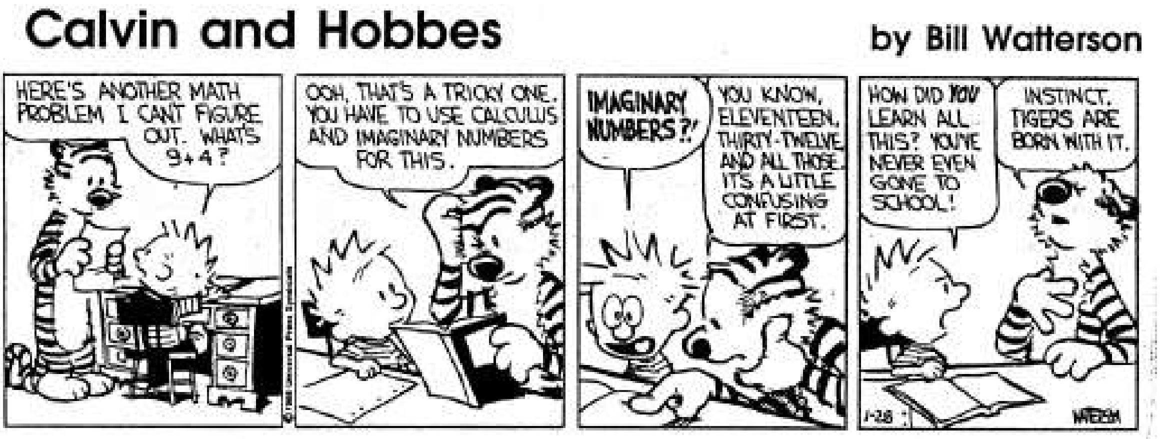
De Komplekse Tal

Johan Martens og Jens-Jakob Kratmann Nissen

27/8-2011



1 Tal

God made the natural numbers; all else is the work of man.

Kronecker

Det er ikke meningen, at vi skal dykke ned i teologien i dag, men dette lille citat rummer en masse nyttig information om tal.

1.1 De Naturlige Tal

Hvad er tal? For de naturlige tal, som vi betegner med $\mathbb{N}$, er svaret simpelt: Tal tæller ting. En god arbejdsdefinition kunne fx være at sige, at tallet 3 er ækvivalensklassen af alle endelige mængder med netop tre elementer. Tallet 3 er altså, hvad en mængde bestående af tre appelsiner har til fælles med mængden bestående af en fugl, en cykel og en banan.
Ud fra dette synspunkt bliver både addition og multiplikation lette at definere. Givet to tal, tager vi mængder med disse antal elementer og laver disjunkt forening eller kartesisk produkt.

Definition 1. Givet mængder A og B, siger vi, at den disjunkte forening $A \sqcup B$ er mængden af elementer fra A og B. I matematisk notation skriver vi

$$A \sqcup B = \{a, b | a \in A, b \in B\}.$$

Definition 2. I matematik er det kartesiske produkt af to mængder A og B, mængden af alle par (a, b), hvor $a \in A$ og $b \in B$. Produktet skrives som $A \times B$. I matematisk notation skriver man

$$A \times B = \{(a, b)|a \in A, b \in B\}$$

.

Vi har således en algebraisk struktur: Mængden $\mathbb{N}$ sammen med operationerne addition og multiplikation. Hver af disse operationer er en afbildning fra $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ til $\mathbb{N}$, to vilkårlige naturlige tal kan adderes og multipliceres.
Når vi tænker på disse afbildninger, kunne det være rart, om man kunne finde inverse afbildninger til disse, hvad vi ønsker er *substraktion* og *division*. Hvis de naturlige tal a og b kan adderes og give c, kan vi ud fra kendskab til a og c finde b - det er tallet, vi må lægge til a for at få c. Dog løber vi hurtigt ind i problemer, hvis vi prøver at formalisere dette, for ikke alle tal kan subtraheres, hvis vi holder os til de naturlige tal, fx kan vi spørge: hvilken mængde har $3 - 5$ elementer?

For at løse dette problem benytter vi en formel konstruktion på mængden af naturlige tal for at få en ny mængde, der forhåbentlig tillader os at løse problemet, men hvad betyder disse nye objekter?

1.2 De Hele Tal

For at løse problemet med subtraktion anvender vi en formel konstruktion og ender ud med heltallene, som vi betegner $\mathbb{Z}$. Vi starter med de naturlige tal og kigger nu på par af disse op til en bestemt ækvivalens: Lad a, b, c, d være naturlige tal. Vi siger, at (a, b) er ækvivalent til (c, d), hvis der findes et naturligt tal e, således at $(a + e, b + e) = (c, d)$ eller omvendt. Mængden af sådanne ækvivalensklasser af par betegnes med $\mathbb{Z}$ og kaldes heltal. Igen kan vi addere heltal: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Alle naturlige tal giver anledning til bestemte heltal: Til a kan vi associere $(a, 0)$. Det er nemt at tjekke, at denne association bevarer additionen fra de naturlige tal. Men nu har vi med et fået negative tal: $(a, 0) + (0, a) = (a, a)$, men (a, a) er ækvivalent til $(0, 0)$, altså har vi nu et tal, der lagt sammen med et naturligt tal a giver 0.
Det lykkedes, vi har ordnet problemet med subtraktion. Vi kan også multiplicere heltal: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$, og igen bevarer det multiplikationen fra heltallene. Men vi kan stadig ikke altid dividere... I matematiske termer siger vi, at heltallene udgør en *ring*, vi kan altid addere og subtrahere, vi kan altid multiplicere, men vi kan ikke altid dividere.
Selvfølgelig er notationen for heltallene normalt ikke den parnotation, vi har benyttet. Normalt betegnes $(a, 0)$ som a og $(0, b)$ som $-b$. Lad os fremover benytte denne notation. Addition og multiplikation opfylder nogle pæne egenskaber, de er begge associative (meget vigtigt) og kommutative, og multiplikation er distributiv mht. addition:
Associativitet betyder, at $(a + b) + c = a + (b + c)$ og $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Kommutativitet betyder, at $a + b = b + a$ og $a \cdot b = b \cdot a$.
Distributivitet betyder, at $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

1.3 De Rationale Tal

Vi er kommet et godt stykke, men hvad nu med division? Vi kurerer problemet med, at vi ikke altid kan dividere et tal a med et tal b, ved igen at benytte en formel konstruktion. Vi lader det være en øvelse til læseren at gøre dette, men kort fortalt skal man kigge på

par (a, b), hvor nu både a og b er heltal, og b er forskellig fra nul. Ækvivalensrelationen, vi nu pålægger, er at (a, b) er ækvivalent til (c, d), hvis der eksisterer et $e \neq 0$, således at $(ae, be) = (c, d)$. Dette giver en ny mængde - De Rationale Tal, og betegnes med $\mathbb{Q}$. Et par (a, b) betegnes her med $\frac{a}{b}$, og til ethvert heltal a associerer vi det rationale tal $\frac{a}{1}$.
I de rationale tal er alt blevet bedre, vi kan stadig addere og multiplicere alle rationale tal, men vi kan også subtrahere og dividere to vilkårlige rationale tal, så længe det rationale tal, vi dividerer med, ikke er lig 0. Kort fortalt udgør de rationale tal et *kommutativt legeme*.

Alt dette var allerede velkendt for de gamle grækere, selvom de nok havde formuleret det en smule anderledes. Men selvom de rationale tal har mange fine egenskaber, er der stadig mangler.

De gamle grækere kendte en del til aritmetik, men det var nu geometri, der var deres foretrukne matematiske disciplin. Som geometre havde de en fin fortolkning af de rationale tal. Vælg to punkter på en linje, og tilegn disse punkter hhv. værdierne 0 og 1, da kan man for ethvert rationalt tal finde et punkt på samme linje, der svarer til dette rationale tal.

1.4 De Reelle Tal

Det viser sig dog, at den modsatte retning ikke er sand, der vil være punkter på linjen, som ikke svarer til noget rationalt tal! For grækerne var dette både en chokerende og irriterende opdagelse. Grækerne elskede at tænke på mængder som harmoniske forhold mellem naturlige tal. Den første person, der påstod, at der fandtes tal, der ikke var rationale - Hippasus af Metapondum, blev ifølge legenden myrdet for sine blasfemiske tanker.

Hvad denne Hippasus påstod, var i virkeligheden et meget enkelt faktum. De græske matematikere kendte Pythagoras læresætning, og hvis man tegner en retvinklet trekant, hvor længden af kateterne er 1, da vil længden af hypotenusen være et tal, der kvadreret giver 2. Hippasus kunne se, at hytotenusen her ikke kunne have rational længde - øvelse til læseren, vis at $\sqrt{2}$ er irrationalt.

Så selvom alle rationale tal kan tegnes på en linje, vil denne linje have "huller". Faktisk vil langt de fleste punkter på en linje ikke være rationale. En matematiker ville sige, at de rationale tal ikke er metrisk fuldstændige.

Igen bliver vores billige trick redningen: Vi kan lave en "metrisk fuldstændiggørelse" af de rationale tal og ende med de *reelle tal*, som vi betegner med $\mathbb{R}$, der igen er et legeme. Som læseren nok kan gætte, er denne metriske fuldstændiggørelse endnu en formel konstruktion: Man ser på følger af rationale tal, som kommer tættere og tættere på hinanden, (som om de approksimerer noget), og lægger en ækvivalensrelation på sådanne følger. Rationale tal giver anledning til konstante følger, men der vil være følger, der ikke er ækvivalente til konstante følger, og disse er de irrationale tal.

Selvom vi hopper let og elegant henover detaljer her, vil dette være velkendt for de fleste af jer. Ingen af jer ligger søvnløse over at tænke på $\sqrt{2}$ som et tal, selvom det kræver en smule arbejde at relatere dette tal til de naturlige tal, som vi begyndte med.

På mange måder er de reelle tal en meget attraktiv mængde af tal. De udgør et legeme og er metrisk fuldstændige og endda ordnede, dvs. givet to reelle tal kan vi sige hvilket, der er det største.

Der er dog en egenskab, som de reelle tal mangler - de er ikke "algebraisk fuldstændige", og det er dette irriterede faktum, der leder os til de komplekse tal.

Hvad mener en matematiker ved at sige "algebraisk fuldstændig"?

Definition 3. Et legeme $\mathbb{F}$ siges at være algebraisk fuldstændigt, hvis der for enhver polynomiel ligning

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

hvor konstanterne a_i er elementer i $\mathbb{F}$, og $a_0 \neq 0$, eksisterer en løsning til denne ligning i $\mathbb{F}$.

Dvs. der findes elementer i $\mathbb{F}$, som substitueret ind på x's plads løser ligningen.
Det er let at se, at $\mathbb{R}$ ikke er algebraisk fuldstændig, se bare på ligningen

$$x^2 + 1 = 0.$$

Det er klart at intet reelt tal kan løse denne ligning, da en løsning ville kvadrere til -1, og alle reelle tal kvadrerer til ikke negative tal.

Bemærk, at hvis en polynomiel ligning af grad n, som ovenfor, har en løsning a, da kan vi benytte divisionsalgoritmen og dividere polynomiet med det lineære polynomium $(x - a)$, dette giver os et nyt polynomium af grad $(n - 1)$. Hvis legemet er algebraisk lukket, vil dette nye polynomium også have en rod, og vi kan fortsætte, indtil vi til sidst kan skrive polynomiet som et produkt af lineære faktorer. En alternativ måde at definere algebraisk fuldstændighed på er at sige, at ethvert polynomium faktorerer fuldstændigt.

2 Tilblivelsen af De Komplekse Tal

Endelig er vi klar til at introducere de komplekse tal. Vi definerer i til at være et tal med egenskaben at $i^2 = -1$. Et imaginært tal er blot et reelt tal gange i. Derfor har vi med det samme, kvadratroden af ethvert negativt tal eksisterer som et imaginært tal, for hvis $a > 0$ har vi, at

$$\sqrt{-a} = \sqrt{(-1)a} = \sqrt{-1}\sqrt{a} = i\sqrt{a},$$

som er imaginær, da $\sqrt{a}$ er et helt almindeligt reelt tal. Bemærk at $-i$ har den samme egenskab: $(-i)^2 = -1$, hvilket er helt fint: for til ethvert positivt reelt tal er der to kvadratrødder, en positiv og en negativ. På samme måde er der for ethvert negativt reelt tal to kvadratrødder, et positivt multiplum af i og et negativt.

Nu da vi har imaginære tal, kan vi snakke om komplekse tal. Et komplekst tal er et tal på formen

$$a + ib,$$

hvor a og b begge er reelle tal. a kaldes for realdelen, og b for imaginærdelen. To komplekse tal kan adderes eller subtraheres:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \text{ and } (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

og multipliceres:

$$(a+ib)(c+id) = ac + a(id) + (ib)c + (ib)(id) = (ac - bd) + i(bc + ad).$$

Selv division er ikke noget problem: For at forstå

$$\frac{1}{c+id},$$

hvor c og d begge er forskellige fra 0, bemærk da blot, at

$$\frac{1}{c+id} = \frac{c+i(-d)}{(c+id)\,(c+i(-d))} = \frac{c+i(-d)}{c^2+d^2},$$

og derfor har vi, at

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)\,(c+i(-d))}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Så de komplekse tal - vi vil betegne dem med $\mathbb{C}$ udgør også et legeme. Og dette legeme er metrisk fuldstændigt, den eneste pris vi må betale er, at der ikke længere er en ordning på de komplekse tal. Vi vil dog se, at vi får meget igen for dette offer...

3 En smule historie

Hvor kommer de komplekse tal fra? Hvorfor er der et problem i, at alle ligninger ikke har en løsning?

Tilblivelsen af de komplekse tal kan spores tilbage til italienske matematikere i det 16. århundrede. På denne tid havde matematikere fundet ud af, hvordan man finder løsninger til kvadratiske (polynomielle) ligninger: Hvis man kigger på

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

og introducerer diskriminanten

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

er løsningen til den kvadratiske ligning præcist givet ved

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ og } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},$$

forudsat at $\Delta \geq 0$. Hvis $\Delta < 0$, er der ingen (reelle) løsninger, hvilket let ses ved at tegne grafen for funktionen $ax^2 + bx + c$ og dernæst observere at grafen ikke skærer den horisontale akse.

Denne viden var gradvist blevet udviklet gennem tiden af grækere, indere, kinesiske og arabiske matematikere, og i den sidste del af det 15. århundrede, var dette også kendt viden i Europa. Det næste naturlige skridt ville være at kigge på ligninger af højere orden som fx

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Det tog nogen tid før man fik fuldstændige løsninger til disse. Til at starte med kiggede man på specialtilfælde som fx ligninger på formen

$$x^3 + px = q.$$

Negative tal var på denne tid stadig en størrelse, man helst holdt sig fra, så man kiggede helst på de tilfælde, hvor alle konstanterne, der optrådte (her p og q), var positive. I dette tilfælde har ligningen kun en (reel) løsning - dette ses let ved at benytte kalkulus, den afledede er intetsteds nul. Dog var der altid en reel løsning, og målet var nu en generel formel. Ved genialt gættearbejde fremsatte Scipione del Ferro fra Bologna formlen

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Men hvad nu, hvis p var negativ?
Med deres uro over for negative tal ville italienerne nu have skrevet ligningen således

$$x^3 = (-p)x + q,$$

men der er selvfølgelig ikke nogen essentiel forskel. Et eksempel på dette er $p = -15$ og $q = 4$, altså

$$x^3 = 15x + 4.$$

Med lidt gætterier kan man finde frem til, at løsningerne er 4 og $-2 \pm \sqrt{3}$, - men hvorledes hænger disse tal sammen med formlerne givet ovenfor, som involverer, at vi bliver nødt til at tage kvadratroden *af et negativt tal*?

Spørgsmål som dette var frygtelig irriterende, men overraskende tidligt begyndte man med dristige skridt at foregive, at man kunne tage kvadratroden af et negativt tal. Da både positive og negative kvadratrødder forekom sammen, som enten sum eller produkt, så det ikke ud til at være et problem, at disse kvadratrødder ikke selv kunne være reelle tal, hvis blot man brugte de samme gamle regler for addition og multiplikation.
Så selvom det ikke så ud til at give mening, begyndte folk som Cardano og hans elev Bombelli, som begge levede i det 16. århundrede, at tale om kvadratrødder af negative tal som *komplekse tal*.

Resten af dagen vil vi tale om komplekse tal, men det kan måske være værd at bemærke, at man kan lave yderligere generaliseringer af talkonceptet. Man kan generalisere de komplekse tal til kvaternioner $\mathbb{H}$, og kvaternioner til octonioner $\mathbb{O}$, hvilket giver

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}.$$

For at gøre dette bliver man nødt til at lave en del arbejde, og i det arbejde mister man nogle pæne egenskaber, som måske bedst beskrives i følgende citat:

> *The real numbers are the dependable breadwinner of the family, the complete ordered field we all rely on. The complex numbers are a slightly flashier but still respectable younger brother: not ordered, but algebraically complete. The quaternions, being noncommutative, are the eccentric cousin who is shunned at important family gatherings. But the octonions are the crazy old uncle nobody lets out of the attic: they are nonassociative.*

Kvaternionerne fås ved ikke blot at have et enkelt tal i, som i tilfældet med de komplpekse tal, men i stedet tre tal i, j, k, som hver især opfylder $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Desuden skal der gælde følgende for multiplikation $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ og $ki = -ik = j$. Som delring kommuterer de reelle tal med i, j, k, og dette bestemmer den algebraiske struktur fuldstændigt. Kvaternionerne udgør et legeme, men dog ikke et kommutativt et af slagsen.

Octonierne, som er næste skridt, viser sig ikke engang at være associative, når det gælder multiplicitet. Interessant nok er de også enden af strengen. De reelle og komplekse tal, kvaternionerne og octionerne er de eneste normerede divisionsalgebraer, der findes. Selvom de er interessante, er kvaternionerne og octionerne af mindre vigtighed, og vi vil ikke nævne dem i det videre forløb.

Generelle formler for løsninger til ligniger af grad 3 og 4 var kendte i 1550, men disse løsningsformler er yderst komplicerede. Overraskende nok er dette også enden af linjen. Der findes ikke generelle formler, som kun involverer rødder, for løsninger til ligninger af grad 5, eller højere. Dette blev vist af Abel i det 19. århundrede.

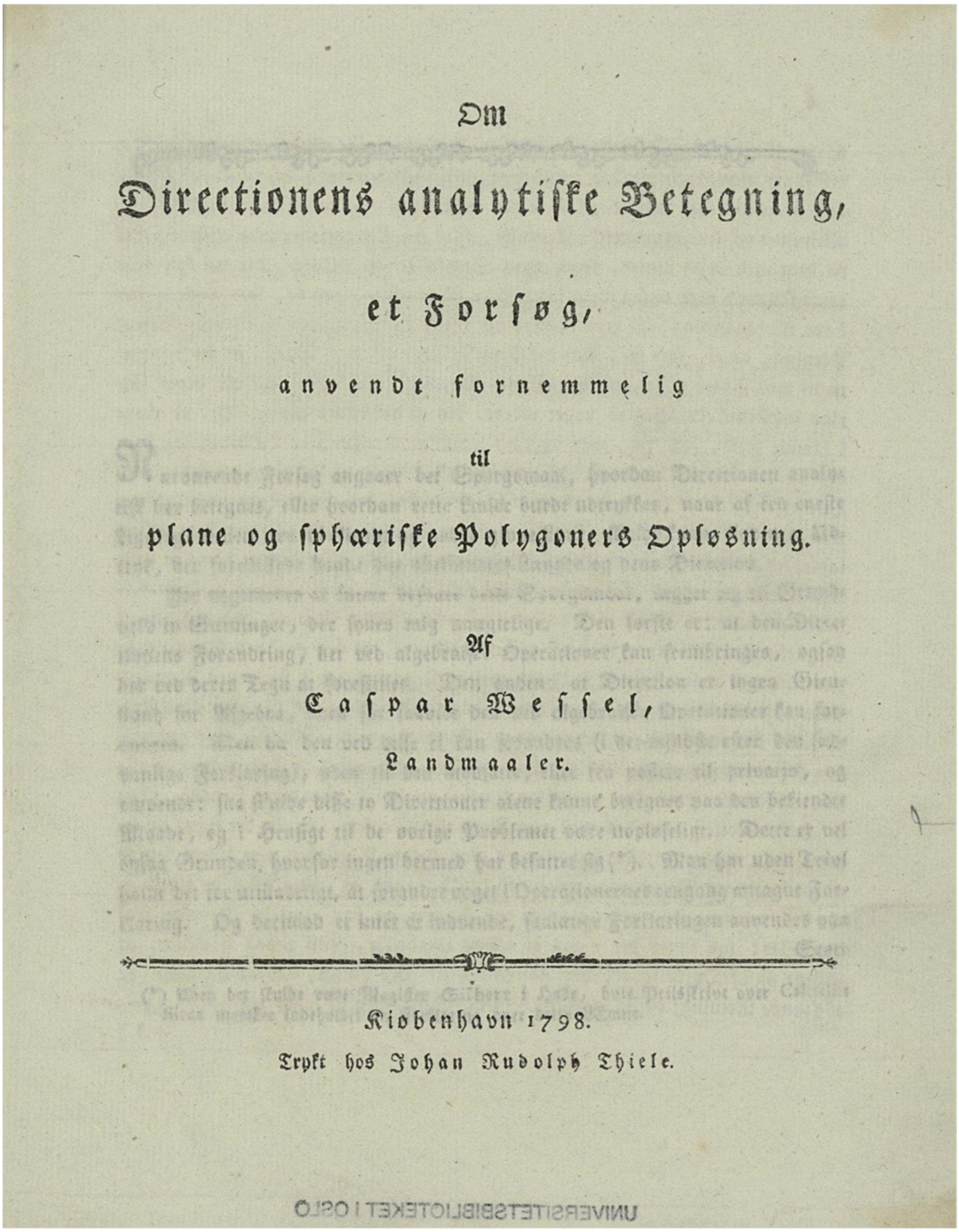
Selvom der ikke findes eksplicitte formler for rødder i vilkårlige polynomier findes rødderne dog altid, hvis vi arbejder med komplekse tal. Det viser sig altså at de komplekse tal er algebraisk fuldstændige. Dette er et så vigtigt faktum, at det ofte betegnes som *algebraens fundamentalsætning*. Der findes mere end 200 beviser for dette faktum.

4 De Komplekse Tals geometri

Dette var skabelsen af de komplekse tal. Som vi nævnte, var folk i begyndelsen nervøse ved dem og rørte dem kun modvilligt. Psykologisk set kom denne modvillighed uden tvivl af, at man nemt kan forestille sig de reelle tal, som punkter på en linje, men hvordan kunne man forestille sig de komplekse tal? Det er klart, at man ikke kan tænke på de komplekse tal, som tal på en linje, men ikke desto mindre er der en yderst attraktiv måde at give de komplekse tal en geometrisk betydning. Der skulle dog gå ca. 250 år fra den italienske renæssance, før nogen indså denne geometriske fortolkning - faktisk lige her i Danmark.

Caspar Wessel var i virkeligheden ikke matematiker - han blev født i Norge og tog sin uddannelse som advokat i København. Han er kun kendt for et enkelt resultat, som han publicerede i slutningen af det 18. århundrede, i ”the Memoires of the Royal Danish Academy of Sciences”.

Hvad Wessel så fint foreslog var, at når vi kan se de reelle tal som punkter på en linje, da burde vi kunne tænke på de komplekse tal som punkter i planen. Hvis vi skriver et komplekst tal som $a + ib$, da er a blot den kartesiske koordinat af dette punkt mht. den reelle akse, og b mht. den imaginære (vertikale) akse. I denne geometriske repræsentation svarer addition af de komplekse tal blot til vektoraddition, men mere vigtigt svarer multiplikation til en kombination af skalering og rotation. Multiplikationen kan nemmest



Om

Directionens analytiske Betegning,

et Forsøg,

anvendt fornemmelig

til

plane og sphæriske Polygoners Opløsning.

Af

Caspar Wessel,

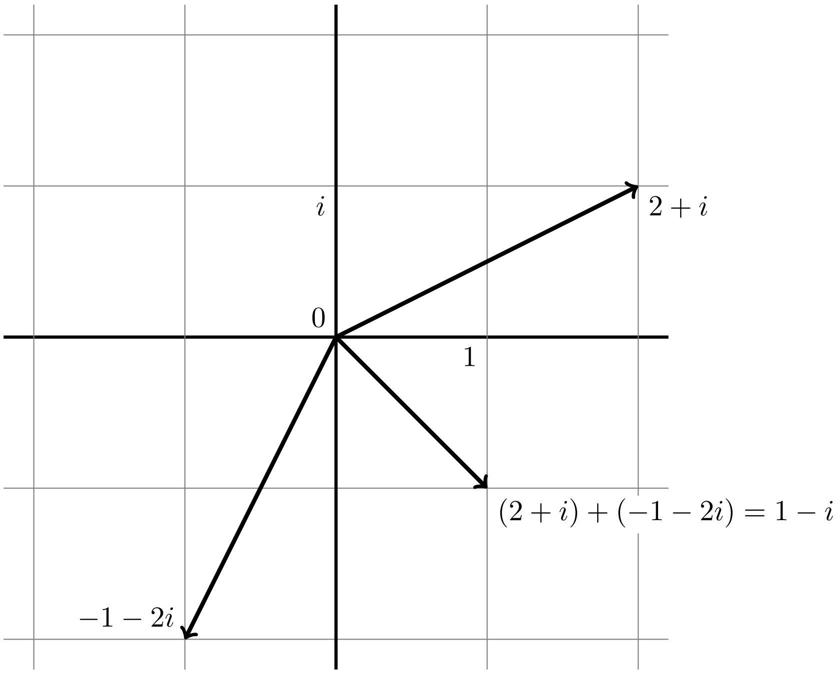
Landmaaler.

Kiøbenhavn 1798.

Trykt hos Johan Rudolph Thiele.

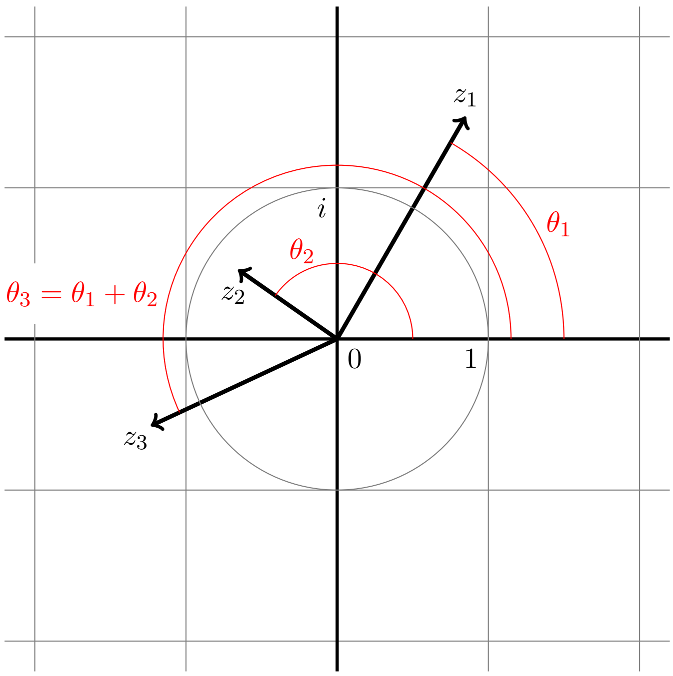
Figure 1: Frontispiece of manuscript of Caspar Wessel

forstås ved at gå fra de kartesiske koordinater til polære koordinater. Dette gøres ved at tage det komplekse tal $a+ib$, og til det associere længden r givet ved $r=\sqrt{a^2+b^2}$, samt den positive vinket $\theta \in [0, 2\pi)$, som linjestykket fra 0 til $a+ib$ danner med den reelle akse.



Så vi kan altså repræsentere et punkt i kartesiske koordinater som $a+ib$ eller i polære koordinater som (r, θ). Multiplikation in polære koordinater bliver

$$(r_1, \theta_1)(r_2, \theta_2) = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2).$$



For at komme tilbage til kartesiske koordinater sætter vi blot $a = r\cos(\theta)$ og $b = r\sin(\theta)$.

5 En yderst bemærkelsesværdig formel

Efter vores ven Wessel har fortalt os, hvordan vi geometrisk kan fortolke de komplekse tal, er vi forhåbentlig blevet overbevist om, at der faktisk ikke er så meget "imaginært" over dem - de er faktisk lige så virkelige, som de rationale tal. Faktisk kan man forvente, at vi kan arbejde med de komplekse tal, som vi arbejder med de reelle. Vi kender allerede til addition og multiplikation, men der er en ting, som vi ikke har diskuteret endnu: *eksponentiation*. Dette vil lede os til en af de mest bemærkelsesværdige formler i al matematik.

Kender man til kalkulus, kender man også svaret på følgende spørgsmål.

Givet en glat funktion f, Hvad er da den bedste lineære approksimation til denne i et givet punkt 0?

Svaret er tangentlinjen, som bestemmes ved det faktum, at den passerer punktet $(0, f(0))$, og hældningen af tangentlinjen er bestemt ved den afledede $f'(0)$, altså er den lineære funktion bestemt ved ligningen

$$A_1(x) = f(0) + f'(0)x$$

.
Dette kan vi nu udvide til højere orden: Hvad er den bedste polynomielle approksimation til en glat funktion af en given grad?
Det viser sig, at man får bedre og bedre approksimeringer af højere og højere orden, hvis man lægger et enkelt homogent led til det forrige således: Den bedste polynomielle approksimation af grad d til funktionen f i punktet 0 er givet ved

$$A_d(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(x)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(d)}(0)}{d!}x^d.$$

Der er faktisk ingen grund til at stoppe ved polynomier af en bestemt grad. Man kan blive ved med at lægge led til af højere og højere grad, hvilket giver en uendelig sum (i matematiske termer kaldes dette en række) For enhver "pæn" funktion (den tekniske term er *analytisk*, og nærmest enhver glat funktion er analytisk) vil denne uendelige række gå mod en f nær 0, altså gælder

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i.$$

Denne rækkeudvikling er kendt som *Maclaurinrækken*.
Hvis vi er interesserede i eksponentiering ved vi, at alle eksponenter på formen a^b, hvor a, b er reelle og $a > 0$ kan forstås ved kun at kigge på eksponentialer med basen e da

$$a^b = e^{\ln(a)b}.$$

Lad os nu skrive Maclaurinrækken ned for funktionen e^x, og for informationens skyld vil vi også inkludere rækkerne for $\cos(x)$ og $\sin(x)$:

$$\begin{array}{rcllllllll}
e^x & = & 1 & +x & +\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{3!} & +\frac{x^4}{4!} & +\frac{x^5}{5!} & +\frac{x^6}{6!} & +\frac{x^7}{7!} & +\dots \\
\cos(x) & = & 1 & & -\frac{x^2}{2} & & +\frac{x^4}{4!} & & -\frac{x^6}{6!} & & +\dots \\
\sin(x) & = & & +x & & -\frac{x^3}{3!} & & +\frac{x^5}{5!} & & -\frac{x^7}{7!} & +\dots
\end{array}$$

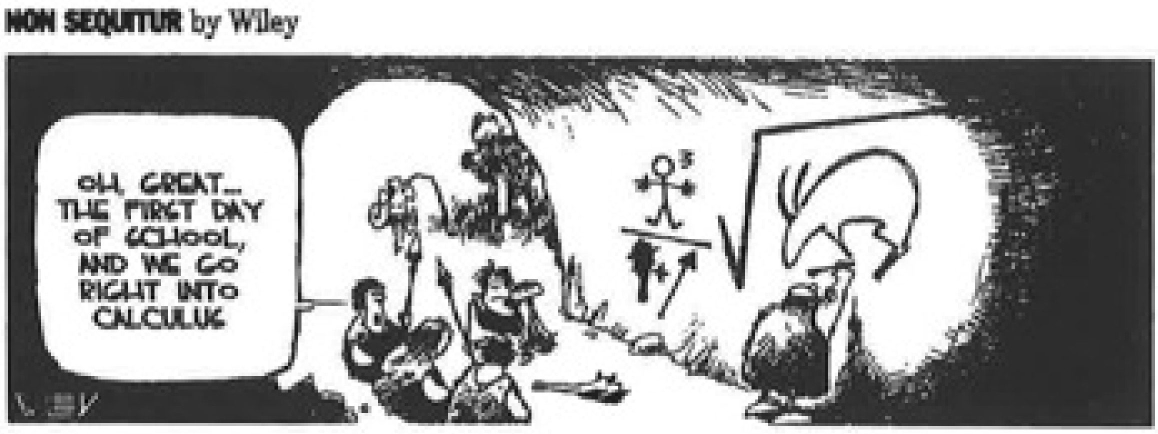
Vi ser, at der er et bestemt mønster her - op til fortegn, e^x ser nærmest ud til at være lig summen af $\cos(x)$ og $\sin(x)$. Dette er meget overraskende, da eksponentialfunktionen a priori ikke har noget at gøre med trigonometriske funktioner.
Endnu mere overraskende er det, at når vi nu har vores imaginære tal i til vores rådighed, kan vi få få fortegnene til at passe. Hvis vi blot formelt (uden at definere dette på nuværende tidspunkt) indsætter ix som argumentet i eksponentialet, altså ser på e^{ix}, da får vi

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Hvis vi stirrer lidt på dette, ser det ud til, at vi har ligheden

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)}$$

Dette er tilfældet, og formlen er kendt som *Eulers formel*. Det er måske en af de mest forunderlige formler i matematikken. Nogle gange angives formlen på den specielle form $e^{i\pi} = -1$, som forener nogle af de grundlæggende konstanter i matematikken i en formel. e (grundtallet for den naturlige logaritme), π (den halve omkreds af enhedscirklen), i (tallet der frembringer de imaginære tal) og -1 (tallet der frembringer de negative tal). Hovedårsagen til, hvorfor dette resultat er så fantastisk, er at ingen af disse konstanter umiddelbart har noget med hinanden at gøre, og at de alle fremkom i forskellig kontekster.



Derive sum and difference formulas for cos and sin.

6 Øvelser

1. Find ved at benytte Euler's formel, sum- og differensformler for

$$\cos(a \pm b)$$

og

$$\sin(a \pm b).$$

2. Givet et komplekst tal $z = a + ib$, er den *komplekse konjugerede* til z, betegnet ved $\overline{z}$, og denne er givet ved

$$\overline{z} = a - ib.$$

Vis, at der for ethvert komplekst tal gælder, at både summen $z+\overline{z}$ og produktet $z\overline{z}$ af et komplekst tal og dets konjugerede, altid er reel. Brug dette til at vise *trekantsuligheden*: For vilkårlige komplekse tal z, w gælder

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

Bemærk at $|z|^2 = z\bar{z}$ og at $\overline{(z+w)} = \overline{z} + \overline{w}$

og udregn da $|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)}$

Benyt nu, at $z\overline{w} = \overline{\overline{z}w}$

Gør rede for, og benyt reglen $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$, færdiggør beviset.

3. Givet a og b i $\mathbb{R}$, løs
$$z^2 = a + ib,$$
og mere generelt
$$z^n = a + ib.$$
Som et eksempel, løs
$$z^5 = 32i.$$

4. Skriv følgende på standardform (a+ib):
   - $3+\sqrt{-16}$
   - $(2+3i)(1-5i)$
   - $(3+2i)^2 + (4-3i)$
   - $\frac{4}{2+3i}$

5. Find alle komplekse løsninger til ligningen $3x^2 + 9x + 7 = 0$.

6. Vis følgende lighed:
$$\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = -\frac{1}{2}.$$

7. Komplekse tal giver os mange muligheder for at beregne π: fra Euler's formel, får vi at
$$\pi = \frac{2}{i}\ln(i).$$
Vi kan omskrive dette til
$$\frac{\pi i}{2} = \ln(i) = \ln\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = \ln(1+i) - \ln(1-i).$$
Benyt nu rækkeudviklingen for $\ln(1+x)$:
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$
og find et udtryk for π som en uendelig sum.

8. Find alle komplekse tal z så der for alle heltallige n, gælder følgende:
$$\frac{1}{2} < |z^n| < 2.$$